



Lehrbuch der Geometrie

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten.

Von

Dr. Eduard Heis,
Prof. der Mathematik und Astronomie an der Königl. Akademie zu Münster

und

Thomas Joseph Eschweiler,
weil. Director der höheren Bürgerschule (jetzigen Realschule) zu Köln.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Zweiter Theil. — Stereometrie.

Köln, 1874.
Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung.

Druck von M. DuMont-Schauberg.

Inhalt.

Stereometrie.

Seite

Erstes Capitel. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

1. Abschnitt. Die gerade Linie im Raume. 1—10 1
2. Abschnitt. Lage einer geraden Linie zu einer Ebene. 11—36 6
3. Abschnitt. Lage zweier Ebenen gegen einander. 37—53 16
4. Abschnitt. Lage dreier und mehrerer Ebenen gegen einander. Körperwinkel. Pyramidaler und prismatischer Raum. 54—80 22

Zweites Capitel. Lehre von der Kugelfläche, Sphärik.

1. Abschnitt. Erklärungen und Haupteigenschaften der Kreise auf der Kugelfläche. 1—16 32
2. Abschnitt. Die sphärischen Winkel und das sphärische Zweieck. 17—20 36
3. Abschnitt. Das sphärische Dreieck. 21—49 38
4. Abschnitt. Vergleichung des Inhaltes der Kugel-Zweiecke, -Dreiecke und -Vielecke. 50—58 48

Drittes Capitel. Polyeder. Eigenschaften, welche die Gestalt derselben betreffen.

1. Abschnitt. Erklärungen. Zahl der Ecken, Kanten u. Seitenflächen. 1—8 52
2. Abschnitt. Sätze über Eigenschaften der Polyeder in Bezug auf die Seitenflächen und Kanten. Bildung der Netze. 9—25 57
3. Abschnitt. Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Polyeder. 26—37 62
4. Abschnitt. Die regulären Körper. 38—49 66

Viertes Capitel. Die Schnitte der Cylinder- und Kegelfläche; Größe des Cylinder- und Kegelmantels, der Oberfläche von Kugel und Ring.

1. Abschnitt. Schnitte der Cylinder- und Kegelfläche. 1—34 75
2. Abschnitt. Inhalt des Cylinder- und Kegelmantels. 35—43 96
3. Abschnitt. Inhalt der Kugelfläche und deren Theile. Oberfläche des Ringkörpers. 44—55 102

Seite

Fünftes Capitel. Vom körperlichen Inhalte der Polyeder.

1. Abschnitt. Inhalt des Prisma. 1—11 108
2. Abschnitt. Inhalt der Pyramiden und Polyeder überhaupt. 12—19.. 114
3. Abschnitt. Die abgestumpfte Pyramide, das abgeschnittene Prisma und der Obelisk. 20—23 117
4. Abschnitt. Die fünf regulären Polyeder, Inhalt und Oberfläche derselben. 24—29 122

Sechstes Capitel. Vom Inhalte der runden Körper.

1. Abschnitt. Cylinder und Kegel. 1—3 131
2. Abschnitt. Kugel und Ring. 4—15 135

Zweiter Theil

als Anhang zu den Elementen der Stereometrie.

1. Anhang. Anfangsgründe der Projectionslehre (der beschreibenden Geometrie). Die Projectionen der regulären Polyeder. 1—18 146
2. Anhang. Allgemeine Sätze über Polyeder, als Fortsetzung zum 1. Abschnitt des 3. Capitels. Die vier sternförmigen regulären Polyeder. 1—15 160
3. Anhang. Allgemeine Sätze über Polyeder. Beweis der Sätze III., 32 und 33 177
4. Anhang. Sätze und Aufgaben über das Tetraeder (die dreiseitige Pyramide). 1—32 183
5. Anhang. Stereographische Projection. 1—12 195
6. Anhang. Zum 2. Abschnitte des vierten Capitels 205
7. Anhang. Zum 1. und 2. Abschnitte des sechsten Capitels 215
8. Anhang. Von hufförmigen Abschnitten des Cylinders und Kegels. 1—8. 220
9. Anhang. Sätze und Aufgaben über Maxima und Minima. 1—46.. 239
10. Anhang. Vermischte Aufgaben. 1—24 260

Stereometrie.

I. Capitel.

Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Erster Abschnitt.

Die gerade Linie im Raume.

1. Erklärung. Die in der Einleitung zum ersten Theile dieses Lehrbuches Nr. 9 ausgesprochene Grundeigenschaft der Ebene, daß sie nämlich jede gerade Linie, die irgend zwei Punkte derselben verbindet, ganz in sich enthalte, gibt den Stoff zu einer genetischen Erklärung der Ebene im Raume. Sie ist folgende:

Bewegt sich eine gerade Linie längs einer andern Geraden von unveränderlicher Lage so, daß sie dabei stets durch einen und denselben außer ihr liegenden Punkt des Raumes geht, so ist die von ihr beschriebene Fläche eine Ebene.

Um die Gültigkeit dieser Erklärung darzuthun, ist nur nachzuweisen, daß jede gerade Linie, die irgend zwei Punkte der so beschriebenen Fläche verbindet, ganz in ihr enthalten ist. Gesetzt, die Linie wäre es nicht, so müßte sie entweder ganz oder wenigstens zum Theile auf einer Seite der Fläche allein liegen. Da aber in der Entstehungsweise der letzteren nichts liegt, was eine Verschiedenheit ihrer beiden Seiten begründen könnte, so müßte, wenn die gerade Linie, welche zwei Punkte der erzeugten Fläche verbindet, auf eine Seite derselben fiele, eine zweite gerade Linie zwischen denselben Punkten möglich sein, welche auf der andern Seite läge. Zwischen zwei Punkten ist aber nur eine gerade Linie möglich; daher kann auch eine gerade Linie, die zwei Punkte der beschriebenen Fläche verbindet, nicht außerhalb derselben liegen. Diese Fläche besitzt also die Grundeigenschaft der Ebene, ist somit eine Ebene.

2. Satz. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte im Raume ist nur eine Ebene möglich; oder: drei Punkte des Raumes, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen in demselben die Lage einer Ebene.

Beweis. Zieht man durch je zwei der Punkte gerade Linien, hierauf durch beliebige Punkte je zweier dieser Linien neue gerade Linien, so fallen alle diese Geraden, wie sich aus 1. schließen läßt, in eine Fläche, deren Punkte also jenen geraden Linien angehören und die als solche eine bestimmte Lage im Raume haben müssen, da zwei Punkte hinreichen, die Lage einer durch sie gehenden Geraden zu bestimmen. Es ist deßhalb auch die Lage der ganzen Ebene bestimmt, sobald drei Punkte derselben gegeben sind.

Dasselbe erhellt auch, wenn man zwei der drei Punkte durch eine gerade Linie verbindet und sich hierauf eine Ebene vorstellt, welche diese gerade Linie in sich enthält. Geht diese Ebene nicht zugleich durch den dritten Punkt, so läßt sie sich doch um jene gerade Linie, wie um eine Achse, so lange drehen, bis der dritte Punkt in sie zu liegen kommt. Dann kann sie sich aber nicht weiter drehen, ohne diesen Punkt zu verlassen. Ihre Lage im Raume ist also, wenn sie durch drei feste Punkte desselben gehen soll, unveränderlich, mithin durch jene Punkte bestimmt.

Zusatz 1. Eine Gerade und ein Punkt außer ihr bestimmen die Lage einer Ebene im Raume; auch können zwei Parallelen nur in einer Ebene liegen.

Zusatz 2. Durch einen Punkt im Raume kann daher nur eine gerade Linie gehen, die einer gegebenen Geraden parallel ist, oder es kann nur eine Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden.

Die Gründe für die Richtigkeit der Zusätze sind leicht einzusehen.

Zusatz 3. Zwei beliebige sich nicht durchschneidende gerade Linien, eben so vier beliebige Punkte, brauchen nicht in einer Ebene zu liegen.

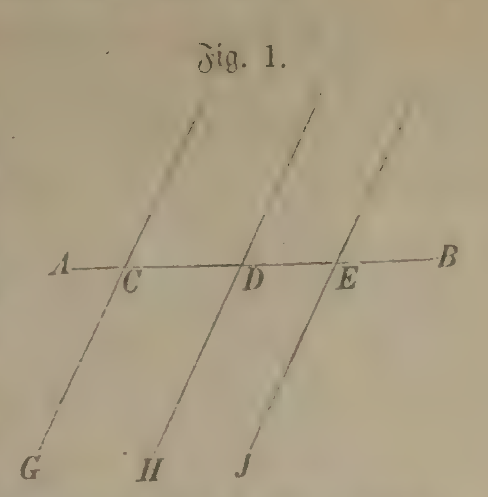
3. Satz. Eine gerade Linie, die in einer Ebene nicht enthalten ist, kann dieselbe in nicht mehr als einem Punkte treffen.

Beweis. Denn träfe dieselbe die Ebene noch in einem zweiten Punkte, so müßte sie nach der Grundeigenschaft der Ebene ganz in der Ebene enthalten sein.

4. Satz. Parallelen, welche eine gerade Linie treffen, liegen unter sich und mit dieser Geraden in einer Ebene.

Beweis. Die Parallelen seien *CG*, *DH* und *EJ*; die Punkte, in welchen sie eine Gerade *AB* treffen, *C*, *D* und *E*. Da die durch *AB* und eine dieser Parallelen, z. B. durch *CG*, bestimmte Ebene die Punkte *D* und *E* enthält, so enthält dieselbe Ebene auch *DH* und *EJ*, welche daher mit *AB* und *CG* in einer Ebene liegen.

Fig. 1.



Zusatz. Es wird eine Ebene auch durch eine gerade Linie beschrieben, wenn diese sich längs einer andern fest liegenden geraden Linie so bewegt, daß sie dabei stets einer und derselben Linie parallel bleibt.

5. Satz. **Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie.**

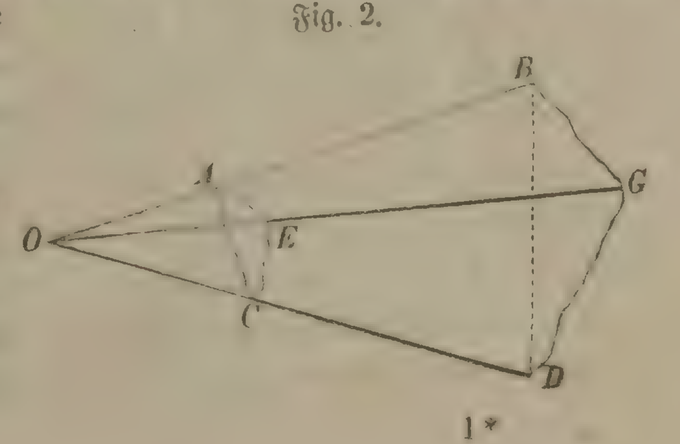
Beweis. Wäre dieses nicht, so müßte es wenigstens drei Punkte in dieser Durchschnittslinie geben, die nicht in gerader Linie liegen; dann könnten aber nach 2. nicht zwei verschiedene Ebenen durch diese drei Punkte gehen. Oder: Denkt man sich irgend zwei gemeinschaftliche Punkte jener Ebenen durch eine Gerade verbunden, so fällt diese Gerade mit allen ihren Punkten sowohl in die eine Ebene, als in die andere, ist somit die Durchschnittslinie jener Ebenen.

6. Satz. **Begegnen einander drei Ebenen zu je zwei und zwei, so treffen ihre Durchschnittslinien entweder a) in einem Punkte zusammen, oder sie sind b) alle drei parallel.**

AB sei die Durchschnittslinie der beiden Ebenen *ABDC* und *ABGE*, *GE* die der Ebenen *ABGE* und *EGDC*, *CD* die der Ebenen *ABDC* und *EGDC*. Es wird behauptet, daß diese drei Durchschnittslinien *BA*, *GE* und *DC* entweder in einem Punkte *O* (Fig. 2) zusammentreffen, oder alle drei einander parallel sind (Fig. 3).

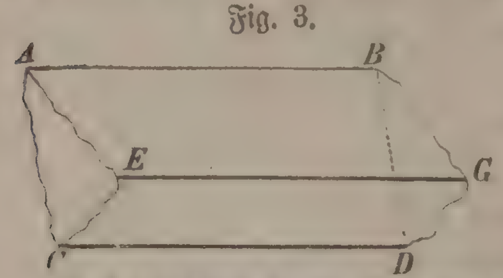
Beweis. Es mögen a) *BA* und *DC* einander in *O* (Fig. 2) treffen. Dieser Punkt *O* gehört alsdann erstens den Ebenen *ABDC*

Fig. 2.



und *CEGD*, zweitens den Ebenen *ACDB* und *AEGB* an; somit gehört er auch den beiden Ebenen *AEGB* und *CEGD* gemeinschaftlich an, folglich liegt *O* im Durchschnitte *GE* dieser beiden Ebenen. Die drei Linien *BA*, *GE* und *DC* treffen somit in dem Punkte *O* zusammen.

Fig. 3.

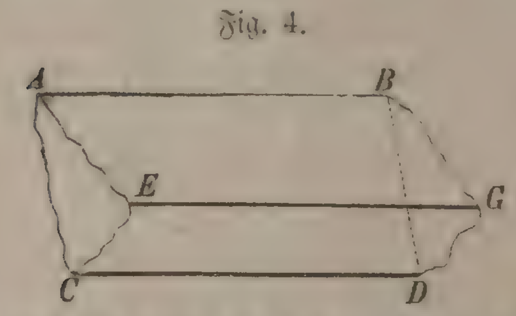


Aus a) ergibt sich unmittelbar b) daß, wenn zwei der Durchschnittslinien *AB* und *CD* (Fig. 3) einander parallel sind, auch die dritte *EG* denselben parallel sein muß. Denn wäre sie nicht parallel u. s. w.

Zusatz. Sind daher zwei gerade Linien einander parallel, so ist auch die Durchschnittslinie irgend zweier durch sie gehenden Ebenen ihnen parallel.

7. Satz. **Sind zwei gerade Linien einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel** (Vergl. Planim. I. 22).

Fig. 4.



Beweis. Es sei $AB \parallel CD$ und $CD \parallel EG$.

Um zu beweisen, daß $AB \parallel EG$ sei, denke man sich eine Ebene gelegt a) durch *AB* und *CD*, b) durch *CD* und *EG*, c) durch *AB* und einen beliebigen Punkt *E* der Linie *EG*, und zeige mit Hülfe des vorhergehenden Satzes, daß die Durchschnittslinie der beiden unter b) und c) genannten Ebenen mit der Linie *EG* in ein und dieselbe Linie zusammenfalle woraus sich alsdann leicht die Richtigkeit der obigen Behauptung ergibt.

8. Satz. **Sind die Schenkel eines Winkels den Schenkeln eines andern Winkels parallel, so sind die Winkel entweder gleich, oder betragen zusammen zwei Rechte** (Vergl. Planim. I. 23).

Beweis. Es sei (Fig. 5) $AB \parallel DE$, $AC \parallel DG$. Um zu beweisen, daß $\sphericalangle BAC = EDG$ sei, nehme man auf *AB* und *DE* die gleichen Stücke *AH* und *DJ* und auf *AC* und *DG* die gleichen Stücke *AK* und *DL*, ziehe die Linien *HJ* und *KL*, sowie *HK* und *JL*. Mit Hülfe des Satzes der Planimetrie II. 34 und des 7. Lehrsatzes läßt sich zeigen, daß *KL* gleich und parallel der Linie *HJ*, und hieraus, daß $HK = JL$ ist. Aus der sich hieraus ergebenden

Congruenz der Dreiecke *AHK* und *DJL* folgt leicht die Richtigkeit der Behauptung.

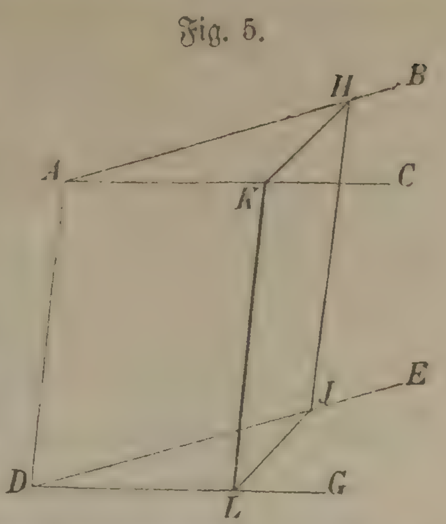


Fig. 5.

Die Fälle, in welchen die Winkel einander gleich oder Supplemente zu einander sind, entsprechen denen der Planimetrie (I. 23. Zus.).

9. Erklärung. Zwei gerade Linien im Raume, durch welche keine gemeinschaftliche Ebene gelegt werden kann, heißen windschiefe Linien. Der vorhergehende Satz macht es möglich, den Begriff des Winkels zweier geraden Linien zu erweitern, ihn nämlich auch auf solche auszudehnen, die nicht aus einem Punkte auslaufen, das heißt auf windschiefe Linien. Der Winkel zweier windschiefen Linien ist derjenige Winkel, den zwei Linien mit einander bilden, welche von einem beliebigen Punkte aus parallel mit den beiden windschiefen Linien gezogen werden. Der in IV. 15 der Planimetrie aufgestellte Begriff der Projection einer begrenzten geraden Linie auf eine andere gerade Linie ist auch auf windschiefe Linien auszudehnen.

Bemerkung. Man unterlasse nicht, den Schüler windschiefe Linien an den ihn umgebenden Gegenständen aufsuchen zu lassen.

Zusatz. Zwei Parallellinien machen mit derselben dritten Linie, wenn sie auch nicht mit ihnen in derselben Ebene liegt, gleiche Winkel. — Der Beweis ist entweder auf 7 oder auf 8 zu stützen.

10. Satz. **Sind zwei windschiefe Linien zweien anderen paarweise parallel, so ist der Winkel der ersten dem der letzteren entweder gleich oder er ist deren Supplement** (Vergl. Planim. I. 23).

Der Beweis leicht.

Zusatz. Bewegen sich daher zwei gerade Linien im Raume so, daß sie ihrer ursprünglichen Lage parallel bleiben, so bleibt ihr Winkel unverändert.

Zweiter Abschnitt.

Lage einer geraden Linie zu einer Ebene.

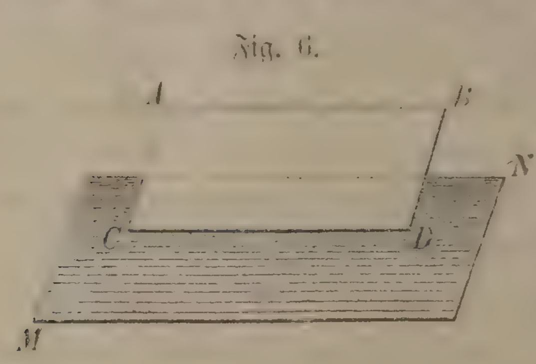
a) Parallele Lage.

11. Erklärung. Analog mit der I. 17 der Planimetrie gegebenen Erklärung von Parallellinien ist folgende:

Eine gerade Linie und eine Ebene sind parallel, wenn beide einander nicht treffen, so weit die Linie verlängert und die Ebene erweitert werden mag.

12. Satz. Ist eine gerade Linie einer anderen parallel, so ist sie auch jeder durch diese zweite Linie gelegten Ebene parallel. (Fig. 6.)

Fig. 6.



Beweis. Da $AB \parallel CD$, so liegt AB mit CD in einer Ebene, aus dieser kann sie also nicht heraustreten. Sollte also AB die MN treffen, so könnte dieses nur in einem Punkte der Durchschnittslinie CD beider Ebenen geschehen, was aber unmöglich ist, weil $AB \parallel CD$ ist.

13. Satz. Eine gerade Linie, die einer Ebene parallel ist, ist auch der Durchschnittslinie dieser Ebene mit jeder anderen durch jene Gerade gelegten Ebene parallel.

Der Satz ist indirect zu beweisen.

Zusatz 1. Ist eine gerade Linie einer Ebene parallel, und eine andere, jener parallele, Gerade liegt mit einem ihrer Punkte in der Ebene, so liegt sie ganz in der Ebene. — Indirect zu beweisen.

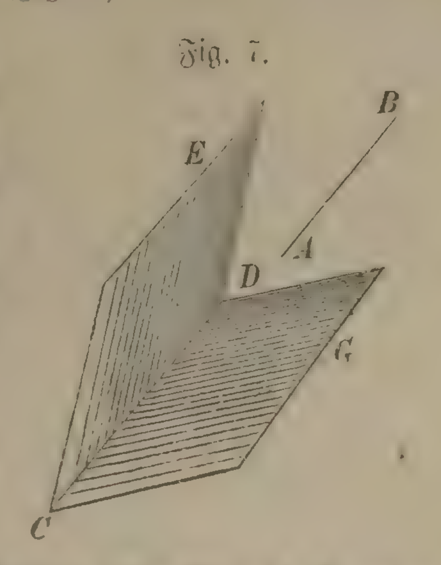
Zusatz 2. Ist eine gerade Linie einer Ebene parallel, so sind auch alle Durchschnittslinien dieser Ebene mit andern, durch jene Gerade gelegten Ebenen unter sich parallel. — Der Beweis ist auf S. 7 zu stützen.

Zusatz 3. Parallellinien, die einerseits durch eine Ebene, andererseits durch eine jener Ebene parallele Gerade begrenzt werden, sind einander gleich.

14. Satz. **Ist eine Gerade zweien Ebenen parallel, so ist sie auch der Durchschnittslinie derselben parallel.** (Fig. 7.)

Beweis. Es sei $AB \parallel CDE$ und auch $AB \parallel CDG$. Um zu beweisen, daß AB der Durchschnittslinie CD der beiden Ebenen parallel sei, denke man sich durch einen beliebigen Punkt der Linie CD, etwa C, mit AB eine Parallellinie gezogen und zeige mit Hülfe von 13, Zus. 1, daß diese Parallele mit CD in eine Linie zusammen falle.

Fig. 7.



15. Aufgaben. a) Durch einen gegebenen Punkt die Ebene zu legen, die zwei gegebenen geraden Linien parallel ist; b) durch zwei gegebene Punkte oder durch eine gerade Linie die Ebene zu legen, die einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

Die Auflösungen leicht.

16. Satz. **Sind zwei gerade Linien einander parallel und ist die eine parallel mit einer Ebene, so ist auch die andere mit der Ebene parallel, oder sie liegt in der Ebene; trifft dagegen die eine von zwei Parallelen eine Ebene, so trifft auch die andere die Ebene.**

Zum Beweise des ersten Theiles lege man durch die der Ebene parallele Linie eine beliebige, jene Ebene durchschneidende, Ebene und stütze den Beweis auf S. 13, 7 und 12. Für den Beweis des zweiten Theiles berücksichtige man die Ebene der beiden Parallellinien.

b) Senkrechte und schiefe Lage.

17. Satz. **Steht eine gerade Linie auf zweien unter drei Linien, die in einer Ebene liegen und sich in einem Punkte treffen, senkrecht, so steht sie auch auf der dritten senkrecht.**

Beweis. Die Linie MON (Fig. 8) stehe senkrecht auf AOE und BOG. OC sei eine beliebige, durch O gehende und in der Ebene der OA und OB liegende Gerade; es soll bewiesen werden, daß MO auch auf OC senkrecht stehe.

Man nehme auf der Linie MON die gleichen Stücke $MO = ON$, verbinde zwei beliebige Punkte H und J der geraden Linien OA und OB durch eine Gerade HJ, welche OC in K treffe (1) und ziehe endlich die Geraden MH,

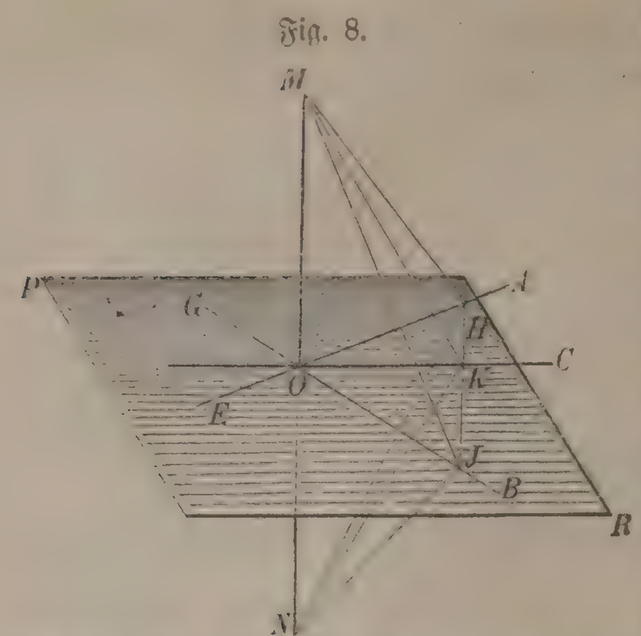


Fig. 8.

MK, *MJ*, *NH*, *NK*, *NJ*. Aus der Construction ergibt sich zunächst $HM = HN$, $JM = JN$ und hieraus die Congruenz der Dreiecke MJH und NJH, woraus alsdann leicht die der Dreiecke MJK und NJK und endlich die der Dreiecke MOK und NOK folgt, wodurch die Richtigkeit der obigen Behauptung sich ergibt.

Einen ähnlichen, aber nicht ganz so einfachen Beweis des Satzes würde man erhalten, wenn man auf den Verlängerungen von AO und BO, auf OE und OG, von O aus Stücke OH' und OJ' abtruge, welche bezüglich den Stücken OH und OJ gleich wären, dann den dem Punkte K entsprechenden Punkt K' bestimmte und den Punkt M mit H', K', J' verbände, u. s. w.

18. Satz. **Steht eine Gerade auf dreien anderen, die sich in einem Punkte treffen, zugleich senkrecht, so liegen diese drei in einer einzigen Ebene.** (Umkehrung des vorigen Satzes.)

Indirect zu beweisen.

Zusatz. Dreht man einen rechten Winkel um einen seiner Schenkel, so beschreibt der andere Schenkel eine ebene Fläche.

19. Erklärung. Von einer geraden Linie sagt man, sie sei oder stehe senkrecht auf einer Ebene, wenn sie mit jeder in dieser Ebene gezogenen geraden Linie, die sie trifft, rechte Winkel macht. Die Möglichkeit hiervon erhellt aus 17. Ist dieses nicht der Fall, so hat sie gegen die Ebene eine schiefe Lage oder Neigung *).

Zusatz. Aus Satz 17 folgt, daß, wenn eine gerade Linie auf zwei anderen sich schneidenden senkrecht steht, sie dann auch sowohl auf deren Ebene als auf jeder in dieser Ebene gezogenen Geraden senkrecht ist.

*) Beispiele von Linien, die senkrecht auf einer Ebene stehen: die Scheitellinie senkrecht auf dem Horizonte, die Erdachse senkrecht auf der Ebene des Erdäquators, die Weltachse senkrecht auf der Ebene des Himmelsäquators. Beispiel einer Linie, die schief gegen eine Ebene steht: die Erdachse steht schief gegen die Ebene der Erdbahn.

20. **Satz. Durch einen Punkt außerhalb einer Ebene kann nur eine gerade Linie gehen, die auf derselben senkrecht steht.**

Der Beweis leicht.

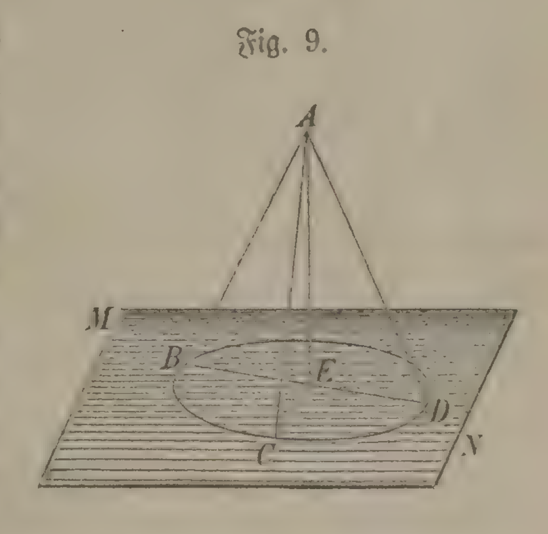
21. **Satz. Von allen geraden Linien, die sich von einem Punkte außerhalb einer Ebene nach Punkten in dieser Ebene ziehen lassen, ist die Senkrechte die kürzeste; zwei schiefe Linien, die gleichweit von der Senkrechten abstehen, sind gleich. Von zwei schiefen Linien, die ungleich weit abstehen, ist die entferntere die längere. Alles dies gilt auch umgekehrt** (Vergl. Plan. II. 14).

Die Beweise einfach.

Zusatz 1. Liegt ein Punkt A (Fig. 9) außerhalb einer Ebene MN von dreien Punkten B, C und D dieser Ebene gleich weit entfernt, und verbindet man den Mittelpunkt E des durch B, C und D gehenden Kreises mit A, so ist AE auf der Ebene senkrecht.

Zieht man nämlich von A nach der Ebene MN eine Senkrechte AE', so liegt E' von B, C und D gleich weit entfernt, muß also mit dem Mittelpunkte E des um B, C und D beschriebenen Kreises zusammenfallen.

Fig. 9.



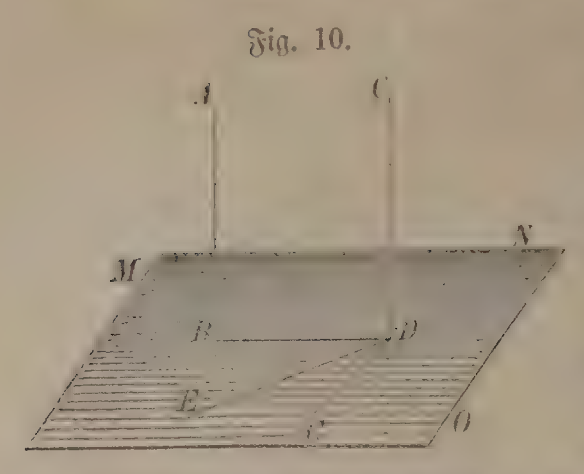
Zusatz 2. Macht eine gerade Linie mit dreien anderen in einer Ebene liegenden Linien gleiche Winkel, so steht jene gerade Linie auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Es mache (Fig. 9) AE mit den drei durch E gehenden und in einer Ebene liegenden Geraden EB, EC und ED gleiche Winkel AEB, AEC und AED. Macht man die Stücke EB, EC und ED einander gleich, so ergibt sich aus der Congruenz der Dreiecke AEB, AEC und AED, daß $AB = AC = AD$ und hieraus nach Zusatz 1 die Richtigkeit der Behauptung.

22. **Satz. Steht eine von zwei Parallelen auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf derselben senkrecht.**

Beweis. Es sei (Fig. 10) $AB \parallel CD$ und $AB \perp MN$. Zieht man durch den Durchschnitt D der Linie CD mit der Ebene MN in dieser Ebene zwei

Fig. 10.



beliebige Gerade *DE* und *DG*, so steht *AB* auf denselben senkrecht (19. Zusatz), mithin auch *CD* auf ihnen (9. Zusatz). Es steht also auch *CD* auf der Ebene *MNO* senkrecht.

Zusatz 1. Umgekehrt: zwei gerade Linien, beide senkrecht auf derselben Ebene, sind einander parallel.

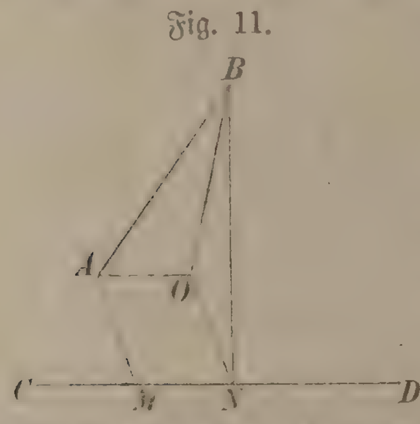
Indirect zu beweisen mit Hülfe des Satzes 20.

Zusatz 2. Alle aus beliebigen Punkten einer schiefen Linie auf eine Ebene gefällten Senkrechten liegen unter sich in einer Ebene.

Auf Satz 4 zu stützen.

23. Satz. Die Projection einer begrenzten geraden Linie auf eine andere ist jedenfalls, auch wenn beide Linien windschief sind, der Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich, dessen Hypotenuse die projicirte Linie und dessen anliegender spitzer Winkel dem Winkel beider Linien gleich ist.

Fig. 11.



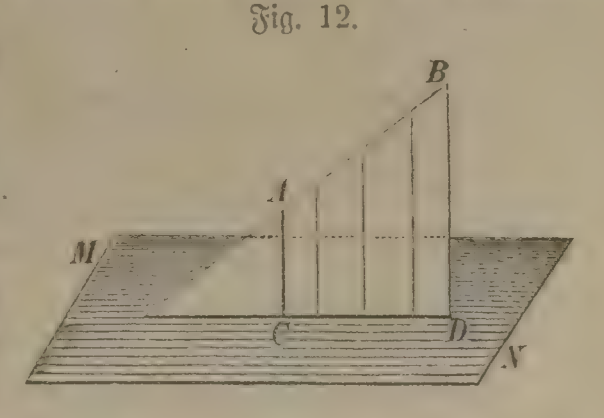
Beweis. *MN* sei die Projection von *AB* auf *CD*, also *AM* und *BN* zwei von *A* und *B* auf *CD* gefällte Senkrechte. Zieht man durch *A* eine Parallele zu *CD* und durch *N* eine Parallele mit *AM* bis zu ihrem Zusammentreffen in *O*, so ist *AMNO* ein Parallelogramm und $MN = AO$. Man ziehe noch *BO*. Da $AM \perp CD$, so ist auch $ON \perp CD$; aber auch $BN \perp CD$, folglich steht *CD* und daher auch die Parallele *AO* auf der Ebene des Dreiecks *BON* senkrecht. *AOB* ist daher ein bei *O* rechtwinkeliges Dreieck, der Winkel *BAO* der Winkel der beiden windschiefen Linien *AB* und *CD* und die Kathete *AO* der Projection *MN* gleich.

Zusatz. Gleich lange Linien, die gleich große Winkel mit andern, gegen sie windschiefen, Linien machen, haben auch gleiche Projectionen auf diese.

24. Erklärung. Entsprechend dem Begriffe der Projection einer Geraden in der Planimetrie (IV. 15) ist der Begriff der Projection einer geraden Linie auf eine Ebene. Fällt man von den Endpunkten einer

geraden Linie *BA* (Fig. 12) Perpendikel *BD* und *AC* auf eine Ebene *MN*, so wird die von den Fußpunkten der Perpendikel begrenzte, in der Ebene liegende, Gerade *DC* die **Projection der ersten Linie** genannt. Die Perpendikel *BD* und *AC* heißen **projicirende Linien**, die Ebene *MN* **Projections- oder Grundebene**, die durch die Perpendikel der Endpunkte gehende Ebene *ABDC*, welche nach 22, Zusatz 2 sämmtliche Perpendikel in sich enthält, welche von beliebigen Punkten der projicirten Geraden auf die Grundebene gefällt werden, heißt **projicirende Ebene**.

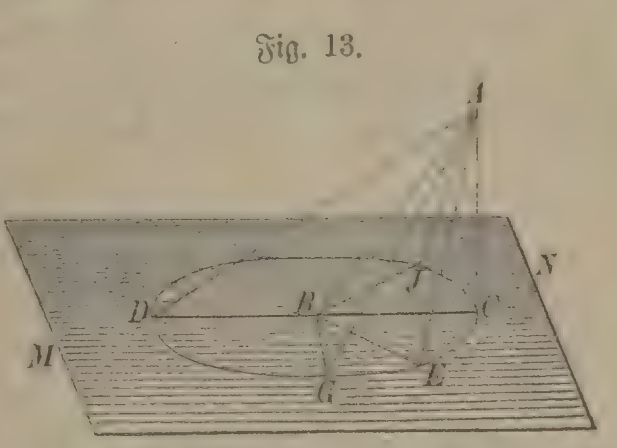
Fig. 12.



25. **Satz.** a) Unter allen Winkeln, welche eine gegen eine Ebene schiefe Linie mit andern in dieser Ebene gezogenen und sie treffenden Linien bilden kann, ist der spitze mit ihrer Projection gebildete am kleinsten, dessen Nebenwinkel am größten; b) die übrigen Winkel sind um so größer, je größer der Winkel ist, den der in der Ebene liegende Schenkel mit der Projection der Schiefen bildet; c) machen zwei in einer Ebene liegende Linien gleiche Winkel mit der Projection, so machen sie auch gleiche Winkel mit der projicirten Linie. Die Sätze gelten auch umgekehrt. (Fig. 13.)

Es sei *AB* eine gegen die Ebene *MN* schief liegende und dieselbe in *B* schneidende Gerade, *BC* ihre Projection, *BD* sei die Verlängerung von *CB*, und *BE*, *BG*, *BJ* seien durch *B* in der Ebene *MN* gezogen. Beschreibt man aus *B* mit *BC* einen Kreis, der die durch *B* gezogenen Linien in *D*, *G*, *E*, *J* schneidet, zieht *AD*, *AG*, *AE*, *AJ*, so ist $CE < CG < CD$ (Planim. III. 9), mithin $AC < AE < AG < AD$ (Satz 21), folglich (Planim. II. 27):

Fig. 13.



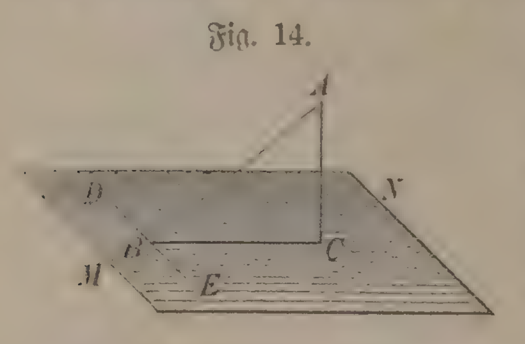
$$\sphericalangle ABC < ABE < ABG < ABD.$$

Bildet ferner *BJ* mit *BC* einen Winkel $JBC = EBC$, so folgt leicht,

daß $AJ = AE$ und $\sphericalangle ABJ = ABE$ ist. Die Umkehrungen der genannten Sätze sind hiernach leicht.

26. Satz. Ist eine gerade Linie auf eine Ebene projicirt und eine zweite in dieser Ebene liegende Linie steht auf der Projection senkrecht, so ist sie auch auf der projicirten Linie senkrecht und umgekehrt. (Fig. 14.)

Fig. 14.



Der Beweis ergibt sich leicht unmittelbar aus c. des vorhergehenden Satzes, läßt sich aber auch ohne Anwendung der Congruenz der Dreiecke beweisen, wenn man eine Hülfsparallele durch C zieht, durch Anwendung von 22.

27. Erklärung. Neigungswinkel einer schiefen Linie gegen eine Ebene ist derjenige Winkel, welchen die Linie mit ihrer Projection auf die Ebene bildet.

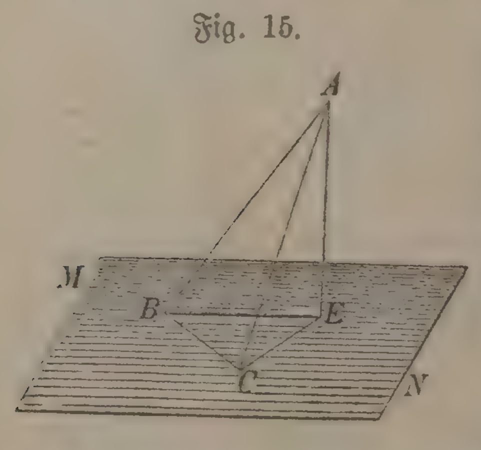
Zusatz 1. Der Neigungswinkel einer Linie und einer Ebene ist das Complement des Winkels, den die Linie mit einer zur Ebene senkrecht stehenden Geraden macht.

Zusatz 2. Perpendikel auf zwei sich durchschneidenden Ebenen haben gegen diese Ebenen wechselweise gleiche Neigung.

Die Beweise leicht.

28. Satz. Machen zwei von einem Punkte ausgehende Linien gleiche Winkel mit einer dritten in einer Ebene liegenden Linie, so machen sie auch gleiche Neigungswinkel mit der Ebene. (Fig. 15.)

Fig. 15.



Beweis. Es mögen die Linien AB und AC gleiche Winkel ABC und ACB mit der in der Ebene MN liegenden Linie BC bilden, alsdann sind auch die Neigungswinkel ABE und ACE der Linien AB und AC gegen die Ebene MN einander gleich.

Ist E die Projection des Punktes A auf die Ebene MN, so erhellt die Richtigkeit der Behauptung leicht aus der Vergleichung der Dreiecke ABE und ACE.

29. Satz. Parallellinien haben gegen dieselbe Ebene gleiche Neigungswinkel.

Der Beweis leicht.

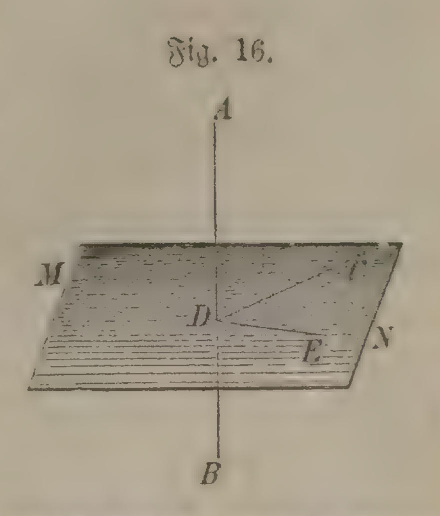
Zusatz. Umgekehrt haben zwei gerade Linien gegen dieselbe Ebene gleiche Neigung, und sind ihre Projectionen einander parallel und nach derselben Seite gerichtet, so sind die Linien parallel.

30. Satz. Gleich große und gegen eine Ebene gleich geneigte Linien haben gleiche Projectionen.

Der Beweis leicht.

31. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt *C* die Ebene zu construiren, welche auf einer gegebenen Linie *AB* senkrecht steht.

Fig. 16.

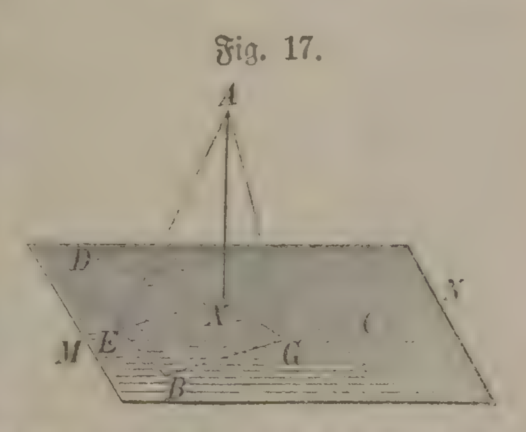


Lösung. Man fälle von *C* auf *AB* die Senkrechte *CD* und ziehe durch den Fußpunkt *D* des Perpendikels auf *DA* eine zweite Senkrechte *DE*. Die durch *CD* und *DE* gelegte Ebene *MN* wird die verlangte sein.

32. Aufgabe. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene die Senkrechte auf dieselbe zu ziehen.

Die Auflösung besteht darin, daß man zuerst auf irgend eine in der Ebene liegende gerade Linie die Senkrechte fällt, dann nach 26 deren Projection zieht und vom gegebenen Punkte aus auf diese die Senkrechte herabläßt.

Fig. 17.

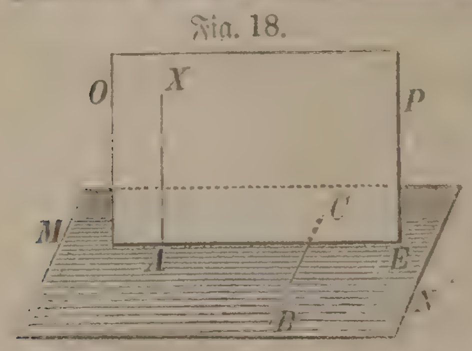


Eine zweite Auflösung ist folgende und gründet sich gleichfalls auf Satz 26. Man ziehe in der Ebene *MN*, auf welche von *A* aus das Perpendikel gefällt werden soll, zwei beliebige sich durchschneidende Linien *BD* und *BC*, fälle von *A* auf dieselben die Senkrechten *AE* und *AG* und errichte auf diesen Linien in *E* und *G* in der Ebene *MN* die in *X* sich schneidenden Senkrechten *EX* und *GX*, wodurch man den Fußpunkt *X* des verlangten Perpendikels *AX* erhält.

33. Aufgabe. Auf einer Ebene in einem gegebenen Punkte derselben die Senkrechte zu errichten.

Eine Lösung dieser Aufgabe erhält man mit Hülfe der vorhergehenden Aufgabe und mit Anwendung von Satz 22. Oder: Man ziehe in der den gegebenen Punkt *A* enthaltenden Ebene *MN* eine beliebige Gerade *BC*, lege durch *A* nach 31 die auf *BC* senkrecht stehende Ebene, welche die gegebene Ebene in *AE* schneiden möge, und errichte in dieser Ebene auf *AE* in *A* die Senkrechte *AX*, welche die verlangte Linie sein wird.

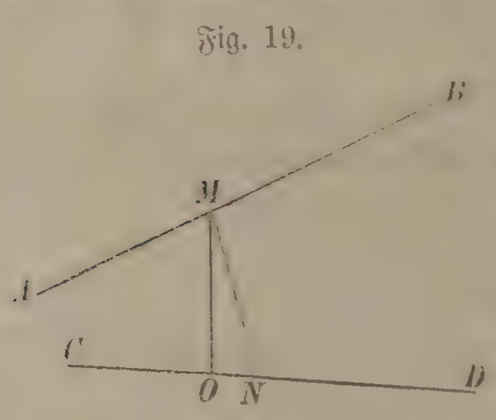
Fig. 18.



Der Beweis leicht.

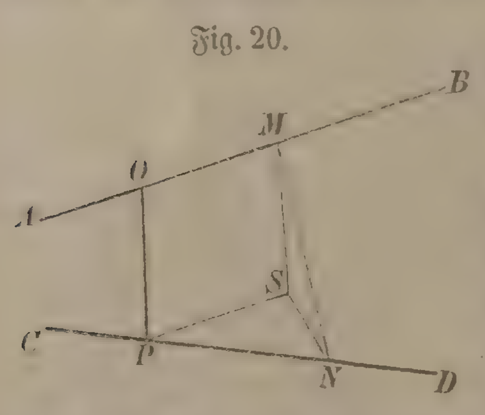
34. Satz. a) Die kürzeste Verbindungslinie zweier windschiefen Linien muß auf beiden zugleich senkrecht stehen. b) Umgekehrt: steht eine gerade Linie auf zwei andern windschiefen Linien zugleich senkrecht, so ist sie die kürzeste Verbindungslinie der beiden letztern.

Fig. 19.



Beweis. Es sei a) *MN* der kürzeste Abstand der beiden windschiefen Linien *AB* und *CD*, d. h. *M* und *N* seien diejenigen ihrer Punkte, welche die kleinste Entfernung haben. Stände *MN* auf *CD* nicht senkrecht, so ließe sich von *M* auf *CD* eine Senkrechte *MO* fällen. Es wäre alsdann $MO < MN$ und somit nicht, wie angenommen wurde, *MN* der kürzeste Abstand der beiden Linien *AB* und *CD*.

Fig. 20.



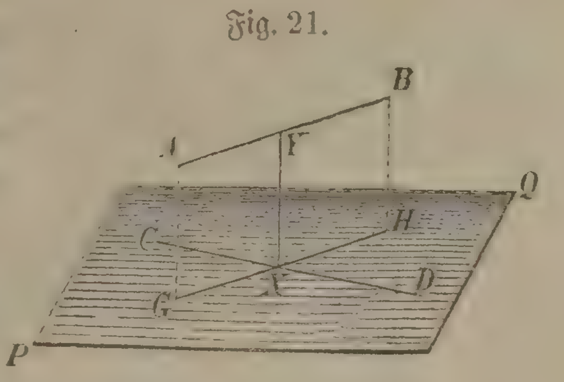
b) Es stehe *MN* auf den beiden windschiefen Linien *AB* und *CD* senkrecht; alsdann läßt sich nachweisen, daß *MN* kürzer ist, als die Verbindungslinie zweier beliebigen Punkte *O* und *P* der Linien *AB* und *CD*. Zieht man nämlich durch *M* die Linie *MS* gleich und parallel der *OP* und verbindet *S* mit *P* und *N*, so ist $SP \parallel MO$. Da ferner *MN* sowohl auf *CD* als auf *PS* (als einer Parallelen zu *AB*) senkrecht steht, so

steht sie auch auf der durch PS und PN gehenden Ebene senkrecht (19 Zus.). Die gerade Linie MS ist also eine schiefe gegen die Ebene SPN und somit $MS > MN$ (21), folglich auch $OP > MN$.

Erklärung. Die auf zwei windschiefen Linien zugleich senkrecht stehende Gerade möge der Kürze halber die **Achse der beiden windschiefen Linien** heißen.

35. Aufgabe. Den kürzesten Abstand zweier windschiefen Linien AB und CD zu construiren.

Fig. 21.

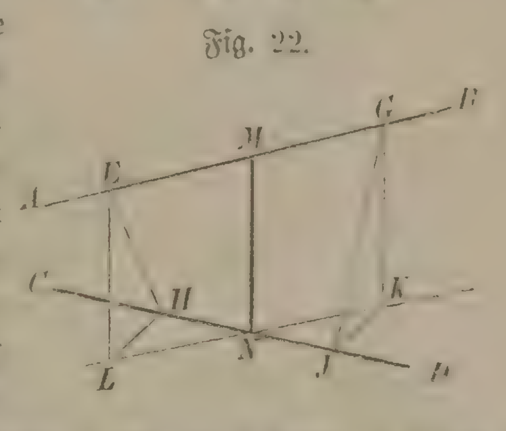


Auflösung. Man lege durch eine der beiden windschiefen Linien AB und CD, z. B. durch CD die Ebene PQ parallel der andern AB (15) und projicire diese andere AB auf sie. Von dem Durchschnittspunkte X dieser Projection GH und der CD fälle man auf AB die Senkrechte XY, welche die verlangte Linie sein wird.

Beweis leicht.

36. Satz. Nimmt man auf jeder von zwei windschiefen Linien vom Endpunkte der Achse an ein paar gleiche Stücke und verbindet die Endpunkte derselben wechselweise, so sind die Verbindungslinien gleich lang.

Fig. 22.



Beweis. Es sei MN die Achse der beiden windschiefen Linien AB und CD, es sei ferner $ME = MG$, $NH = NJ$, alsdann wird $EH = GJ$ sein. Zum Beweise lege man durch E und G mit MN Parallellinien EL und GK, ziehe durch N mit AB eine jene Parallelen in L und K schneidende Parallele LK und ziehe HL und JK. Leicht ergibt sich aus der Eigenschaft der Figur, daß $NL = NK$ und daß $HL = KJ$ ist. Da ferner, wie sich leicht nachweisen läßt, EL und GK auf der durch CD und LK gehenden Ebene senkrecht steht, so ergibt sich in Verbindung mit Obigem, daß $EH = GJ$ sein muß.

Dritter Abschnitt.

Lage zweier Ebenen gegen einander.

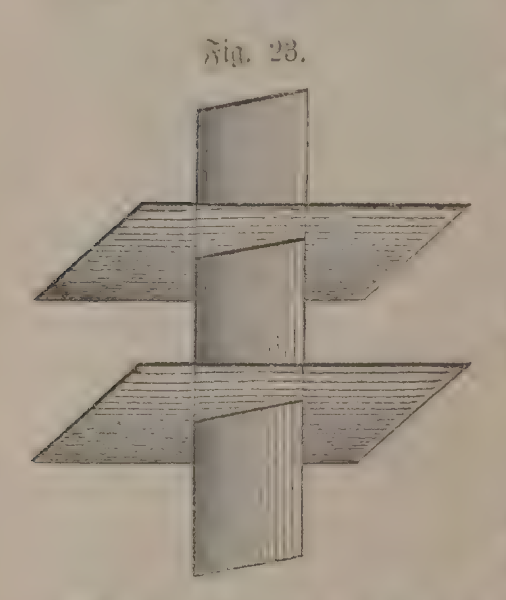
a) Parallele Ebenen.

37. Erklärung. Zwei Ebenen sind einander parallel, wenn keine mit der andern irgendwo zusammentreffen kann, so weit man sie auch erweitert.

38. Satz. **Sind zwei Ebenen einander parallel, so ist jede gerade Linie, welche in der einen Ebene liegt, parallel mit der andern Ebene.**

Der Beweis ist leicht direct oder indirect zu führen.

Fig. 23.



39. Satz. **Die Durchschnitte zweier parallelen Ebenen mit einer dritten sind unter sich parallel** (Fig. 23).

Beweis leicht.

40. Satz. **Parallellinien von Parallelebenen begrenzt sind einander gleich.**

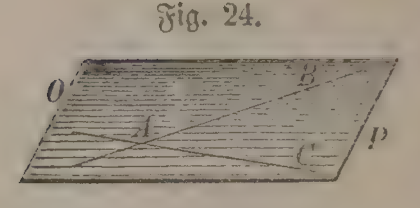
Beweis einfach.

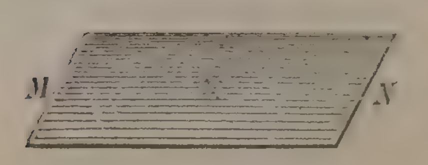
41. Satz. **Zwei gerade Linien werden durch drei Parallelebenen proportionirt geschnitten.**

Bei dem Beweise hat man darauf Rücksicht zu nehmen, ob die beiden gegebenen Linien in einer Ebene liegen oder nicht.

42. Satz. **Sind zwei sich durchschneidende gerade Linien einer Ebene parallel, so ist auch die durch jene Linien gelegte Ebene dieser Ebene parallel.** (Fig. 24.)

Fig. 24.





Beweis. Es seien die beiden in A sich durchschneidenden Geraden AB und AC der Ebene MN parallel. Gesetzt, die durch AB und AC gelegte Ebene OP wäre der gegebenen Ebene MN nicht parallel, sondern durchschnitte dieselbe in einer geraden

Linie XY, so hätte, da XY wenigstens eine der Linien AB und AC in einem Punkte Z durchschnitte, die durchschnittene Linie mit der Ebene MN den Punkt Z gemeinschaftlich, was gegen die Voraussetzung ist. Also u. s. w.

Zusatz 1. Sind zwei sich durchschneidende Linien zweien andern sich durchschneidenden parallel, so ist auch die durch jene Linien gehende Ebene der durch diese gehenden parallel.

Der Beweis stützt sich auf die Sätze 12 und 42.

Zusatz 2. Durch einen Punkt ist mit einer Ebene nur eine Parallelebene möglich.

Zusatz 3. Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Ebene die Parallelebene zu legen.

Zusatz 4. Zwei Ebenen einer dritten parallel, sind unter sich parallel.

43. Satz. **Projicirt man zwei Parallellinien auf eine und dieselbe Ebene, so sind sowohl die projicirenden Ebenen als auch die Projectionen einander parallel.**

Der Beweis beruht auf 22, Zusatz 1. 42, Zusatz 1 und auf 39.

44. Satz. **Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht, so sind sie einander parallel.**

Der Beweis ist entweder auf Satz 42 zu stützen, oder indirect zu führen.

Zusatz. Stehen zwei Ebenen auf zwei parallelen Geraden senkrecht, so sind sie einander parallel. Beweis leicht.

45. Satz. **Steht eine Gerade senkrecht auf einer von zwei Parallelebenen, so steht sie auch senkrecht auf der andern.**

Beweis einfach.

Zusatz 1. Zwei Parallelebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

Zusatz 2. Gleich geneigte Linien zwischen zwei Parallelebenen sind einander gleich.

Zusatz 3. Die Neigungswinkel einer Geraden gegen zwei Parallelebenen sind einander gleich. (Der Satz gilt nicht umgekehrt.)

b. Ebenen, welche sich unter schiefen oder rechten Winkeln durchschneiden.

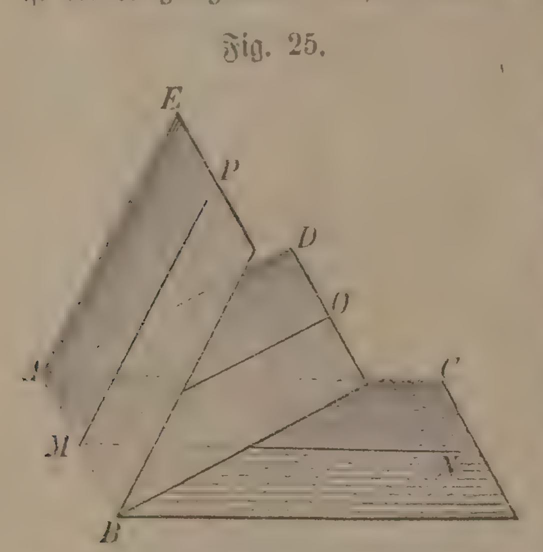
46. Erklärung. Unter Winkel zweier, einerseits in einer geraden Linie zusammenstoßenden, andererseits unbegrenzten Ebenen, oder unter

Flächenwinkel versteht man die Größe der Umdrehung, welche eine von diesen Ebenen um die gemeinschaftliche Gerade, Scheitellinie, Kante, beider machen muß, um in die Lage der andern Ebene zu gelangen.

Gleiche und ungleiche Flächenwinkel, Nebenflächenwinkel, Scheitelflächenwinkel, rechte, spitze, stumpfe Flächenwinkel. Die Erklärungen und die aus denselben abgeleiteten Sätze entsprechen genau denen der Planimetrie über Linienwinkel (I. Cap. 1.—14. Satz).

47. Erklärung. Als Maß des **Flächenwinkels** zweier Ebenen dient der Winkel zweier Perpendikel, die auf der gemeinschaftlichen Scheitellinie in einem Punkte derselben in den beiden Ebenen errichtet werden. Dieser Winkel wird auch der **Neigungswinkel** der beiden Ebenen genannt. Die Ebene dieses Winkels steht also senkrecht auf der gemeinschaftlichen Kante. Die bemerkenswertheste Lage, welche eine Ebene gegen die andere haben kann, ist die **senkrechte**. Steht eine Ebene auf einer andern senkrecht, so ist der Neigungswinkel dieser Ebenen ein rechter Winkel.

Fig. 25.



Es seien ABC und ABD zwei an AB stoßende Ebenen und MN und MO seien senkrecht auf AB in dem Punkte M in den Ebenen ABC und ABD errichtet. Der Winkel NMO wird alsdann das Maß des Flächenwinkels der Ebenen ABC und ABD sein; denn erstens bleibt dieser Winkel nach Satz 8 derselbe, in welchem Punkte M der Durchschnittslinie AB auch die Senkrechten MN und MO in den Ebenen ABC und ABD gezogen werden mögen. Dieser Winkel ändert sich ferner bei fortgesetzter Drehung um die Durchschnittslinie offenbar in demselben Verhältnisse, wie der Flächenwinkel der Ebenen und verschwindet mit ihm zugleich, wenn die Ebenen auf einander fallen.

48. Satz. Der Neigungswinkel zweier Ebenen ist entweder dem Winkel gleich, den zwei Linien mit einander bilden, die auf den Ebenen senkrecht stehen, oder ist Supplement dieses Winkels. (Fig. 26.)

Beweis. Es seien ABC und ABD zwei an AB stoßende Ebenen, $\sphericalangle\, OMN$ ihr Neigungswinkel; ferner seien in M auf ABC und ABD die Senkrechten PS und TR errichtet. Die Linien TR und PS liegen mit MO und MN offenbar in einer Ebene (Satz 18); es ist also:

a) $\sphericalangle\, TMP = OMN$ (Plan. I. 24);



b) ferner $\sphericalangle\, SMR = OMN$;

c) $\sphericalangle\, PMR + OMN = 2R$ und

d) $\sphericalangle\, TMS + OMN = 2R$.

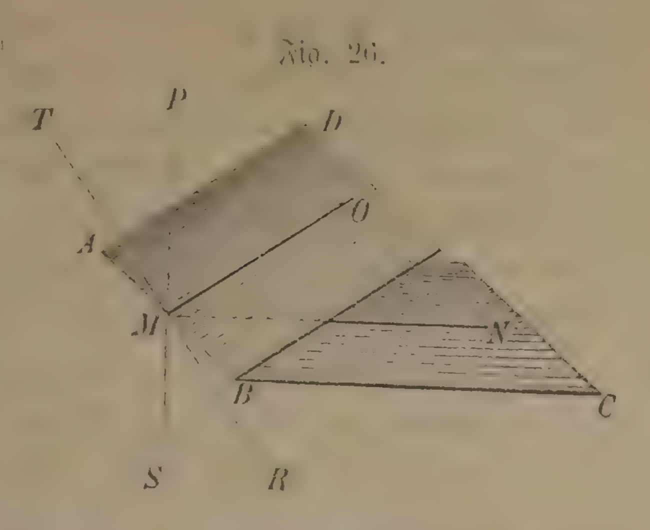


Fig. 26.

Der Satz gilt aber offenbar, auch wenn die auf den Ebenen errichteten Senkrechten nicht durch einen Punkt ihrer Durchschnittslinie gehen. (S. 8.)

Zusatz. Legt man jeder der beiden Ebenen, die einen hohlen Flächenwinkel bilden, zwei Seiten bei, eine innere, nach dem Winkelraume gekehrte, und eine äußere, so machen die in einem Punkte der gemeinschaftlichen Kante errichteten Perpendikel, wenn sie beide nach der innern (c), oder beide nach der äußern Seite des Flächenwinkels liegen (d), Winkel mit einander, welche Supplemente des Flächenwinkels sind.

49. Satz. Steht eine Gerade auf einer Ebene senkrecht, so wird auch jede durch jene Gerade gelegte Ebene auf der ersteren Ebene senkrecht stehen; und umgekehrt, stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht, so wird jede Gerade, die in einer derselben liegt und die Durchschnittslinie der Ebenen unter rechten Winkeln trifft, auch auf der andern Ebene senkrecht stehen. (Fig. 27.)

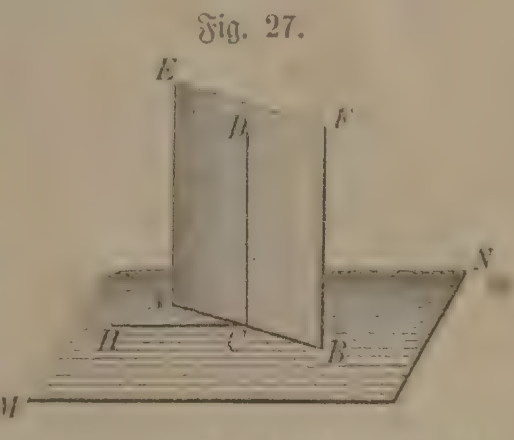


Fig. 27.

Die Beweise der beiden Sätze sind leicht durch Construction des Neigungswinkels der beiden Ebenen zu führen.

Zusatz 1. Die projicirende Ebene einer schiefen Linie steht auf der Projectionsebene senkrecht.

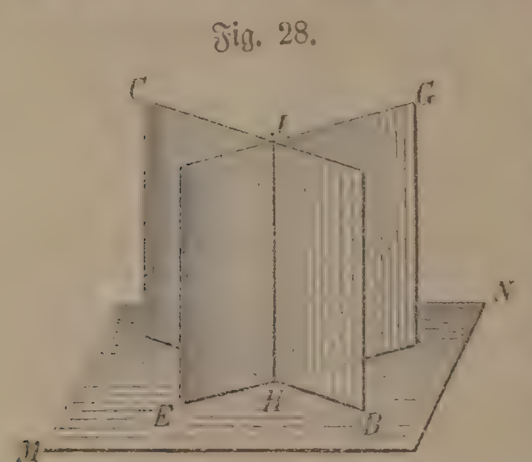
Zusatz 2. Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht auf diesen senkrecht.

Zusatz 3. Stehen zwei Ebenen EB und MN auf einander senkrecht, so wird auch jede Senkrechte, die entweder von einem Punkte D der einen Ebene EB auf die andere Ebene gefällt, oder die in einem Punkte C der

Durchschnittslinie beider Ebenen auf *MN* errichtet wird, in der andern Ebene *EB* liegen.

50. Satz. Stehen zwei Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten senkrecht. (Fig. 28.)

Fig. 28.

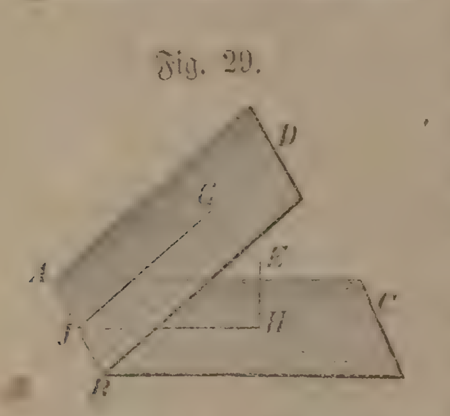


Es mögen *BC* und *EG*, auf *MN* in *HB* und *HE* senkrecht stehen, die Durchschnittslinie *HJ* beider Ebenen wird alsdann auf der Ebene *MN* senkrecht stehen.

Zum Beweise denke man sich in *H* auf *MN* ein Perpendikel errichtet und wende Zusatz 3 des vorigen Satzes an.

Zusatz 1. Gehen also (Fig. 29) von einem Punkte *E* aus zwei Perpendikel *EG* und *EH* nach zwei Ebenen, so steht die durch die Perpendikel bestimmte Ebene *GEHJ* auf der Durchschnittslinie *AB* der erstgedachten Ebenen senkrecht.

Fig. 29.



Zusatz 2. Stehen von drei Ebenen je zwei auf einander senkrecht, so stehen auch die drei Durchschnittslinien wechselweise auf einander senkrecht.

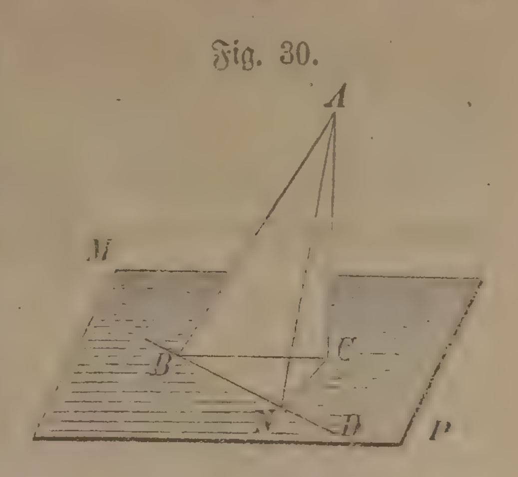
Zusatz 3. Durchschneiden sich zwei außerhalb einer Ebene liegende Geraden, so ist der Durchschnittspunkt ihrer Projectionen auf diese Ebene die Projection des Durchschnittspunktes der beiden Geraden.

51. Satz. Unter allen Ebenen, die man durch eine gegen eine Ebene *MP* schief gerichtete Gerade (Fig. 30) legen kann, macht diejenige, deren Durchschnitt mit der Ebene *MP* die Projection jener Linie ist, den größten Flächenwinkel mit *MP*, diejenige, deren Durchschnitt auf der Projection senkrecht steht, den kleinsten. Der Flächenwinkel der übrigen mit der Ebene *MP* ist um so größer, je näher die Durchschnittslinie beider Ebenen der Projection jener Geraden liegt.

Anleitung zum Beweise. *AB* sei die gegen die Ebene *MP* schiefe Linie, *BC* ihre Projection, *BD* der Durchschnitt einer durch *AB* gelegten

Ebene mit *MP*. Fällt man aus dem Fußpunkte *C* des Perpendikels *AC* die Linie *CN* ⊥ *BD* und verbindet *A* mit *N*, so ist leicht nachzuweisen, daß *ANC* der Neigungswinkel der beiden Ebenen *MP* und *ABD* ist; derselbe wird um so größer, je kleiner ∢ *CBN* ist. Hieraus ergeben sich die Grenzen der Veränderung.

Fig. 30.



52. Satz. **Zwei Parallelebenen werden von einer dritten Ebene unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.**

Der Beweis ist leicht durch Construction der Neigungswinkel der Ebenen zu führen.

Zusatz 1. Umgekehrt: Werden zwei Ebenen von einer dritten so geschnitten, daß die Durchschnittslinien einander parallel sind, und haben jene Ebenen zur dritten Ebene gleiche, nach derselben Seite gekehrte Neigungswinkel, so sind jene beiden Ebenen einander parallel.

Der Beweis ist auf Satz 42, Zusatz 1 zurückzuführen.

Zusatz 2. Eine Ebene, senkrecht auf einer von zwei Parallelebenen, steht auch auf der andern senkrecht.

Zusatz 3. Sind zwei Ebenen zweien andern paarweise parallel, so sind die Flächenwinkel derselben entweder gleich oder sie betragen zusammen zwei Rechte (Vergl. Planim. I. 23).

53. Satz. **Sind eine Gerade und eine Ebene einander parallel, und steht eine zweite Ebene senkrecht auf der Linie, so steht sie auch senkrecht auf der ersteren Ebene.**

Der Beweis ist auf Satz 49 zurückzuführen.

Zusatz. Umgekehrt: Stehen eine gerade Linie und eine Ebene senkrecht auf einer andern Ebene, und fallen sie nicht ineinander, so ist die Gerade der ersteren Ebene parallel.

Vierter Abschnitt.

Die Lage dreier und mehrerer Ebenen gegen einander. Körperwinkel. Pyramidaler und prismatischer Raum.

54. Erklärung. Gehen drei oder mehrere Ebenen durch einen Punkt, und begrenzen sich zu je zwei in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, so daß die letzte sich an die erste schließt, so heißt die so gebildete Figur eine Körperecke oder ein körperlicher Winkel*) (Körperwinkel). Die geraden unbegrenzten Linien, in welchen diese Ebenen zusammenstoßen, heißen die Kanten der Ecke. Die Kanten laufen in demselben Punkte zusammen, durch den auch die Ebenen gehen, welche den körperlichen Winkel bilden. Dieser Punkt ist die Spitze oder der Scheitel des körperlichen Winkels. Die Ebenen selbst werden Seitenflächen genannt. Die Neigungswinkel dieser Seitenflächen können der Kürze halber als Winkel der körperlichen Ecke bezeichnet werden. Man verwechsele diese Winkel nicht mit den an der Spitze liegenden und von je zwei auf einander folgenden Kanten gebildeten Winkeln, welche der Analogie wegen kurzweg Seiten der Körperecke genannt werden können. Eine körperliche Ecke heißt 3, 4, 5 u. s. w. n-kantig, wenn 3, 4, 5 u. s. w. n Kanten an ihr vorhanden sind.

Körperliche Winkel und Polygone bieten in sofern eine Analogie dar, als in beiden die Seiten mit den Winkeln, die sie bilden, beständig wechseln. Sie unterscheiden sich jedoch wesentlich dadurch, daß die Seiten eines Polygons Längengrößen, die Seiten der körperlichen Ecke Winkelgrößen sind, welche die Stelle jener vertreten. Den Winkeln des Polygons entsprechen die Neigungswinkel der Seitenflächen der körperlichen Ecke. In Folge dieser Analogie können bei dreikantigen Ecken besondere Arten, als: gleichschenkelige und gleichseitige, rechtwinkelige und schiefwinkelige, ebenso bei den mehrkantigen reguläre und nicht reguläre, convexe und nicht convexe körperliche Ecken in derselben Weise unterschieden werden, wie bei Dreiecken und Vielecken.

55. Erklärung. Zwei körperliche Ecken heißen nach Planim. Einl. 16 congruent unter derselben Bedingung, wie alle übrigen Raumgrößen, nämlich wenn sie sich decken können. Sind zwei körperliche Ecken congruent, so sind sämmtliche Seiten und Winkel der einen Ecke den bezüglichen Seiten und Winkeln der andern Ecke gleich; aber nicht umgekehrt ist mit der Gleichheit

*) Angulus solidus, angle solide. Die Franzosen nennen den durch zwei Ebenen gebildeten Winkel angle dièdre.

dieser Stücke die Deckung verbunden. Diese findet nämlich nur dann Statt, wenn die gleichen entsprechenden Stücke in beiden körperlichen Ecken nicht allein in derselben Ordnung, sondern auch, wofern die Spitzen nach einerlei Seite gekehrt sind, in derselben Richtung auf einander folgen. Ist die Richtung aber eine entgegengesetzte, so heißen die körperlichen Ecken symmetrisch *).

Ist z. B. ∢ $AOC = A'O'C' = A''O''C''$, $BOA = B'O'A' = B''O''A''$ und $BOC = B'O'C' = B''O''C''$, sind ferner die von den Ebenen der entsprechenden gleichen Seiten gebildeten Winkel einander gleich, so können Fig. 2 und 1 zur Deckung gebracht werden, nicht aber 1 mit 3 oder 2 mit 3. Es sind demnach 1 und 2 congruente, dagegen 1 und 3, sowie 2 und 3 symmetrische Ecken.

Fig. 31.

Zusatz. Zwei körperliche Ecken, symmetrisch gegen eine dritte, sind unter sich congruent.

Bemerkung. Auch bei congruenten Dreiecken und Polygonen, die in einer Ebene liegen, kann die Richtung, in der die gleichen Stücke auf einander folgen, entweder die nämliche in beiden Figuren oder eine entgegengesetzte sein. In beiden Fällen können aber solche Figuren zur Deckung gebracht werden, in Folge der Grundeigenschaft der Ebene, daß ihre beiden Seiten einander völlig gleich sind, also zur Deckung gebracht werden können.

56. Erklärung. Verlängert man sämmtliche Kanten einer körperlichen Ecke über den Scheitelpunkt hinaus, so heißt diejenige körperliche Ecke, welche die Verlängerungen als Kanten hat, die Gegenecke der ersteren. Umgekehrt ist die erste Ecke die Gegenecke der zweiten.

57. Satz. Sämmtliche Seiten und Winkel der körperlichen Ecke sind denen der Gegenecke entsprechend gleich, die Ecken selbst sind aber im Allgemeinen symmetrisch.

Die Gleichheit der Seiten und Winkel der körperlichen Ecke und ihrer

---

*) Auf die Symmetrie in körperlichen Figuren überhaupt und die Nothwendigkeit, bei Beweisen auf dieselbe zu achten, hat zuerst Legendre in seinen Eléments de Géometrie 2. édition gehörige Rücksicht genommen. Die Bezeichnung symmetrisch rührt von ihm her.

Fig. 32.



Gegenecke ergibt sich unmittelbar. Bringt man in Gedanken die Gegenecke mit ihren Seiten und Winkeln auf die Ecke selbst, so wird man sie wegen Verschiedenheit der Richtung der auf einander folgenden Stücke im Allgemeinen nicht zur Deckung bringen können; die körperlichen Ecken sind also symmetrisch.

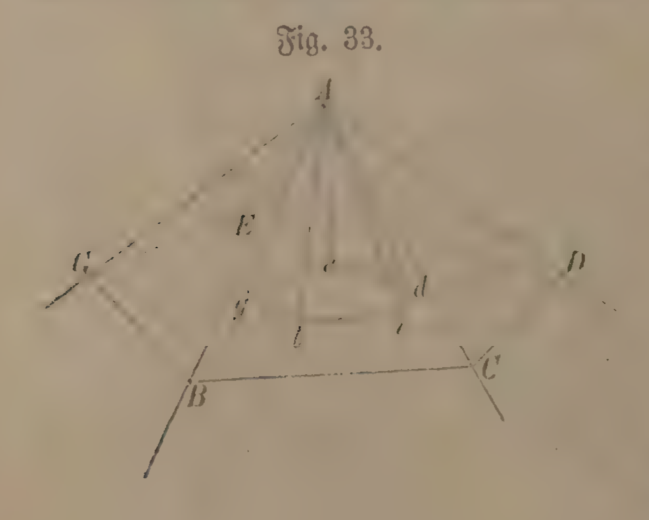
Zusatz. Ist eine körperliche Ecke einer andern symmetrisch, so ist sie der Gegenecke dieser congruent.

58. Satz. **Sind die Kanten einer körperlichen Ecke den Kanten einer andern Ecke parallel und sämmtlich nach derselben Seite gehend, so sind die körperlichen Ecken einander congruent; laufen sie aber sämmtlich nach der entgegengesetzten Seite, so sind die körperlichen Ecken symmetrisch.**

Der Beweis auf 8 und 52, Zusatz 3 zu stützen.

59. Satz. **Stehen die Kanten einer körperlichen Ecke senkrecht auf den Seitenflächen einer andern, so stehen umgekehrt auch die Kanten der zweiten senkrecht auf den Seitenebenen der ersteren.**

Fig. 33.



Beweis.

Es seien $ABCDEG$ und $Abcdeg$ zwei körperliche Ecken und es möge

$Ab \perp EAD$,
$Ac \perp GAE$,
$Ad \perp BAG$,
$Ae \perp CAB$,
$Ag \perp DAC$ sein,

alsdann werden auch die Kanten AB, AC, AD, AE

und AG der Ecke $BCDEGA$ auf den Seitenebenen cAd, gAe, bAg, cAb **und** dAc **senkrecht stehen.**

Da Ab und Ac senkrecht auf EAD und GAE stehen, so ist sowohl bAE als auch $cAE = R$, mithin steht EA senkrecht auf der Ebene cAb. Ebenso wird bewiesen, daß $AD \perp bAg$ u. s. w.

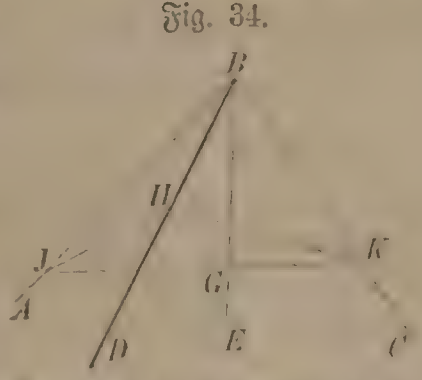
60. Erklärung. Stehen die Kanten einer Ecke auf den Seitenflächen einer andern, also auch die Kanten dieser auf den Seiten jener senkrecht, und sind sämmtliche Kanten nach der innern Seite jener Flächen oder alle nach der äußern Seite derselben gerichtet, so heißen diese Ecken reciproke Ecken, der Gegenseitigkeit wegen, welche bei den in 59 und 61 ausgesprochenen Eigenschaften Statt finden. Diese Ecken werden auch wohl Supplementsecken, Polarecken genannt.

61. Satz. **Reciproke körperliche Ecken stehen in der Beziehung zu einander, daß die Seiten der einen sich mit den Winkeln der andern zu einem flachen Winkel ergänzen.**

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus dem Zusatze des S. 48.

62. Satz. **Die Summe zweier Seiten einer dreikantigen körperlichen Ecke ist größer als die dritte Seite.**

Fig. 34.



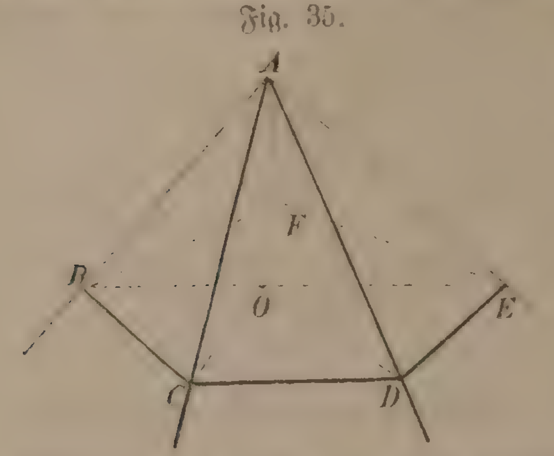
Beweis. Es sei ABC der größte der drei Seitenwinkel der dreikantigen körperlichen Ecke $DACB$; es ist zu beweisen, daß $\sphericalangle DBA + DBC > ABC$.

Man ziehe in der Ebene des Winkels ABC die Gerade BE so, daß $\sphericalangle ABE = ABD$ wird, nehme auf den Schenkeln BD und BE zwei gleiche Stücke BH und BG und lege durch H und G eine beliebige, die Kanten BA und BC in J und K schneidende Ebene. Aus der Congruenz der Dreiecke BJH und BJG folgt $JH = JG$. Da ferner nach Planim. II. 6 $HK > KJ - HJ$ d. i. KG ist, so ergibt sich aus der Vergleichung der Dreiecke BHK und BGK nach II. 27 der Planim., daß $\sphericalangle HBK > GBK$ ist, woraus endlich die Richtigkeit des oben behaupteten Satzes sich ergibt.

63. Satz. **Die Summe aller Seiten einer convexen körperlichen Ecke ist kleiner als 4 Rechte.**

Beweis. Man durchschneide die n Seiten der körperlichen Ecke A durch eine Ebene, nehme innerhalb des durch den Durchschnitt gebildeten n-Ecks $BCDEF$ einen beliebigen Punkt O und verbinde denselben mit den Eckpunkten B, C, D, E und F. Vergleicht man mit Hülfe des vorhergehenden Satzes die Summe der Winkel OCD, ODC, ODE u. s. w., welche mit den um O liegenden Winkeln zusammengenommen $2nR$ betragen, mit den Winkeln ACD, ADC, ADE, AED u. s. w., welche mit den an A liegenden Winkeln CAD, DAE u. s. w. ebenfalls zusammen $2nR$ betragen, so ergibt sich leicht die Richtigkeit der Behauptung.

Fig. 35.



Der Beweis kann auch noch in anderer Art ohne Hülfe de Polygons $BCDEF$ geführt werden; da dieser Beweis jedoch später im II. Capitel Satz 26 bei den sphärischen Vielecken sein strenges Analogon hat, und dem dort geführten nach der Bemerkung in II. 21 leicht nachgebildet werden kann, so wird dessen Ausführung hier unterlassen.

64. Satz. **Die Summe aller Winkel einer convexen körperlichen Ecke ist kleiner als $2nR$ und größer als $2(n-2)R$.**

Beweis. Man denke sich zu der n-kantigen körperlichen Ecke die reciproke construirt (60). Heißt die Summe der Winkel der gegebenen körperlichen Ecke S und die Summe der Seiten der reciproken s, so ist:

$S + s = 2nR$ (61), mithin

a) $S < 2nR$.

Da ferner (nach 63) s kleiner als $4R$, so ist:

b) $S > 2nR - 4R$, d. i. $2(n-2)R$.

Zusatz. Die Summe aller Winkel einer dreikantigen Ecke liegt zwischen 2 und 6 Rechten.

65. Satz. **In einer dreikantigen körperlichen Ecke liegen a) gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber, b) gleichen Winkeln gleiche Seiten, c) liegt der größern Seite ein größerer Winkel, und d) dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.**

Zum Beweise der Behauptungen ziehe man von einem beliebigen Punkte C der Kante OC der dreikantigen körperlichen Ecke $ABCO$ nach Aufg. 32, 2. Lösung, die Senkrechte CE auf AOB und beweise für a) die Congruenz der Dreiecke COM und CON und hieraus die der Dreiecke CME und CNE; für b) diese Congruenzen in umgekehrter Ordnung. Für c) und d) kommen die Sätze über Nichtcongruenz in Anwendung.

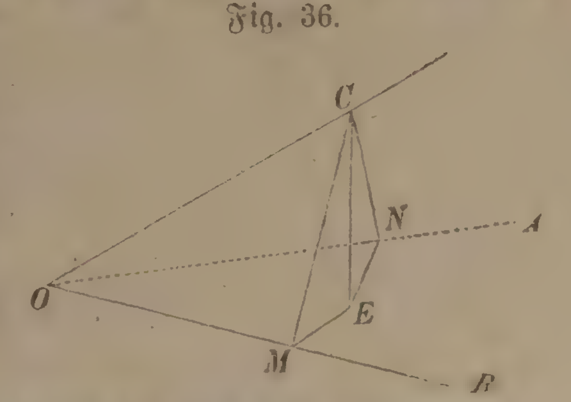


Fig. 36.

66. **Satz. Zwei dreikantige körperliche Ecken sind congruent oder symmetrisch, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.**

Beweis. Ist die Richtung, in der die Seiten und Winkel in beiden Dreiecken auf einander folgen, dieselbe, so kann man die dreikantigen Ecken in derselben Weise, wie Planim. II. 8 mit Dreiecken geschehen ist, zur Deckung bringen. Ist dieses nicht der Fall, so läßt sich die eine der Ecken mit der Gegenecke der andern zur Deckung bringen.

67. **Satz. Zwei dreikantige körperliche Ecken sind congruent oder symmetrisch, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.**

Der Beweis ähnlich dem in 66 angedeuteten. Der Satz ist zugleich eine Folge des vorhergehenden durch die in 61 ausgesprochene Eigenschaft der reciproken körperlichen Ecken.

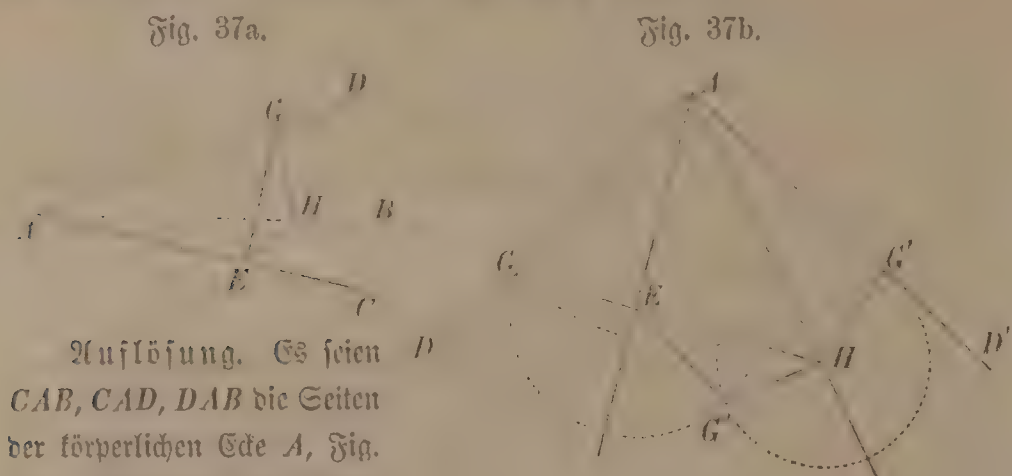
68. **Satz. Zwei dreikantige körperliche Ecken sind congruent oder symmetrisch, wenn die drei Seiten der einen paarweise den drei Seiten der andern gleich sind.**

Man untersuche zuerst den Fall, wo die Reihenfolge der gleichen Seiten in beiden Körperecken nicht dieselbe ist, und führe den Beweis ganz analog dem Beweise des entsprechenden Satzes von der Congruenz der Dreiecke (Planim. II. 10). Der andere Fall ergibt sich hiernach leicht durch Construction einer Gegenecke.

69. **Satz. Zwei dreikantige körperliche Ecken sind congruent oder symmetrisch, wenn die drei Winkel der einen paarweise den drei Winkeln der andern gleich sind.**

Dieser Satz, der keinen analogen in der Planimetrie findet, läßt sich leicht mit Hülfe der reciproken Körperecken auf den vorhergehenden zurückführen.

70. Aufgabe. Gegeben seien die drei Seiten einer dreikantigen körperlichen Ecke; durch eine in einer Ebene ausgeführte (sogenannte graphische) Construction einen der Winkel zu finden.


Fig. 37a. Fig. 37b.

Auflösung. Es seien *CAB*, *CAD*, *DAB* die Seiten der körperlichen Ecke *A*, Fig. 37a. Um einen der Winkel dieser Ecke, z. B. den an der Kante *AC* liegenden, durch eine ebene (d. h. in einer Ebene bleibende) Construction zu finden, stelle man sich zuvörderst diesen Winkel als Neigungswinkel der Ebenen *CAB* und *CAD* an der Ecke selbst construirt vor, derselbe sei *GEH*, von den auf *AC* in den genannten Ebenen errichteten Perpendikeln *EG* und *EH* gebildet; *G* sei mit *H* durch *GH* verbunden. Denkt man sich nun die an das Dreieck *AEH* stoßenden Dreiecke *AEG*, *AHG*, *EHG* durch Umdrehung um diejenige Seite, welche jedes derselben mit *AEH* gemein hat, also *AEG* durch Drehung um *AE*, *AHG* durch Drehung um *AH*, ꝛc. in die Ebene von *AEH* gebracht, so entsteht eine aus allen vier Dreiecken bestehende ebene Figur *AGEG''HG'* oder das mit denselben Buchstaben bezeichnete Netz der Körperfigur, Fig. 37b, worin *GAE*, *EAH*, *HAG'* gegebene Winkel sind, *AE*

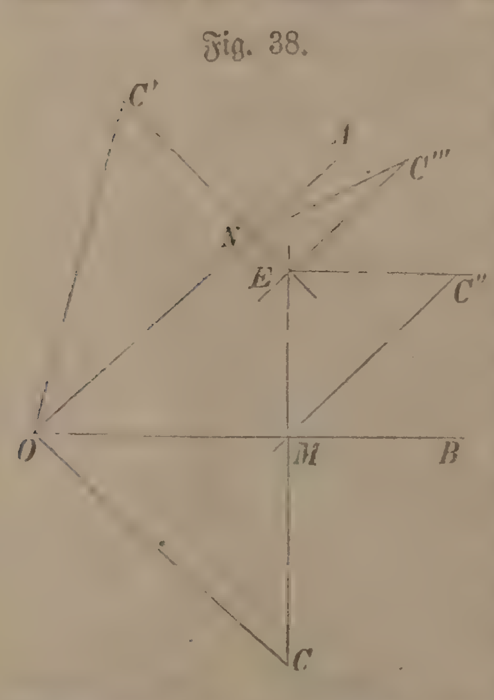


Fig. 38.

eine beliebige Länge hat, $AG' = AG$, $EG'' = EG$, $HG'' = HG'$. Der Winkel HEG'' ist der gesuchte. Hiernach und nach nebenstehender Zeichnung des Netzes wird die Constructionsweise desselben keine Schwierigkeit bieten.

Construirt man zwei der Neigungswinkel nach der Fig. 36 des Satzes 65 und legt die körperliche Ecke wieder wie vorher durch Umdrehung der Dreiecke OCN, OCM, CEM, CEN in die Ebene des Winkels AOB, so ergibt sich ein anderes Netz, dessen Construction aus der Figur 38 hinreichend erhellen wird.

71. **Aufgabe.** **Gegeben seien zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einer dreikantigen körperlichen Ecke; durch ebene Construction die gegenüberliegende Seite zu finden.**

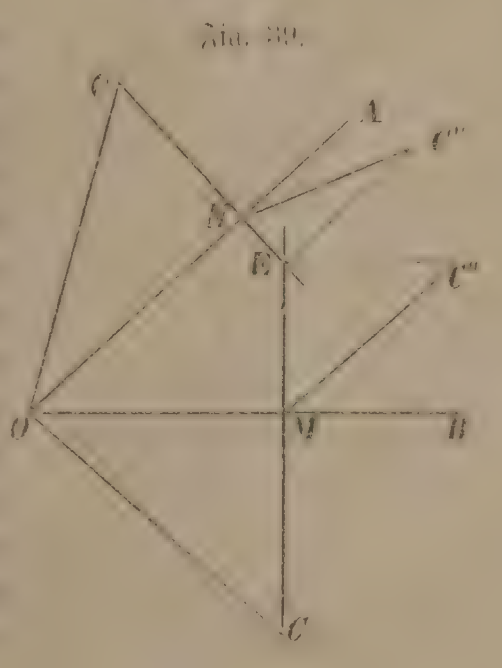
Die Construction leicht mit Rücksicht auf die Figur 37b in 70.

72. **Aufgabe.** **Gegeben seien die drei Winkel einer körperlichen Ecke, durch ebene Construction eine der Seiten zu finden.**

Die Construction ist mit Hülfe des Satzes 61 von reciproken Ecken auf Aufg. 70 zurückzuführen.

73. **Aufgabe.** **Gegeben eine Seite und zwei anliegende Winkel einer dreikantigen körperlichen Ecke; durch ebene Construction die übrigen Stücke zu finden.**

Fig. 39.



Die Betrachtung des in 70 angewandten zweiten Netzes gibt leicht zu erkennen, daß $\sphericalangle\, C'''EC'' = AOB$. Ist also der Winkel AOB als Seitenwinkel gegeben, so construire man zuerst den Winkel $C'''EC''$ als gegebenen Winkel, mache $EC''' = EC''$, construire die rechtwinkeligen Dreiecke $C''EM$ und $C'''EN$, so daß die Winkel $C''ME$ und $C'''NE$ den gegebenen Winkeln der Körperecke gleich werden, ziehe ferner $MO \parallel EC''$, $NO \parallel EC'''$. Verlängert man endlich ME um $MC = MC''$, EN um $NC' = NC'''$, verbindet C und C'

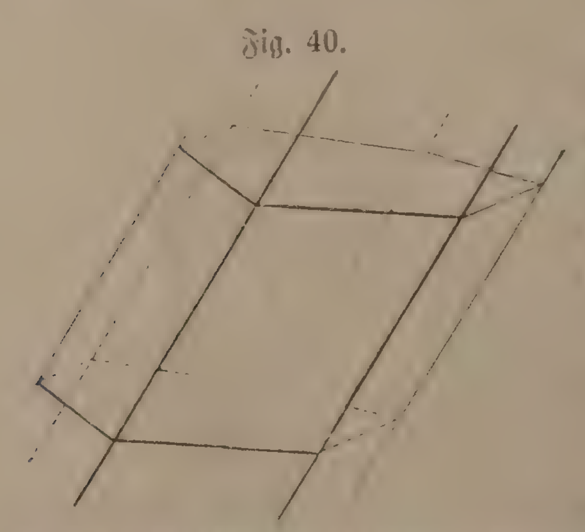
mit O, so sind, wie sich leicht nachweisen läßt, COM und $C'ON$ die beiden gesuchten Seiten der körperlichen Ecke.

74. Erklärung. Treffen drei oder mehrere Ebenen sich der Folge nach, und zwar die letzte wieder die erste, in Durchschnittslinien, die sämmtlich einander parallel sind, so bleibt der von ihnen umschlossene Raum von zwei Seiten unbegrenzt und soll prismatischer Raum heißen. Die Ebenen heißen die Seitenflächen des prismatischen Raumes.

75. Erklärung. Treffen in gleicher Weise drei oder mehrere Ebenen sich in Durchschnittslinien, die sämmtlich durch einen Punkt gehen und zu beiden Seiten unbegrenzt fortlaufen, so bilden sie einen nach zwei Seiten hin ins Unendliche sich erstreckenden Doppelraum, welcher ein pyramidaler Raum genannt wird. Er ist von der Körperecke nur darin verschieden, daß er zu beiden Seiten des Durchschnittspunktes der Linien sich erstreckt.

76. Erklärung. Eine Gruppe von Geraden, die sämmtlich durch einen Punkt gehen, übrigens eine beliebige Lage im Raume haben, und nach beiden Seiten unbegrenzt sind, wird bei neuern Schriftstellern Strahlenbündel (faisceau) genannt. Der Durchschnittspunkt selbst heißt das Centrum des Bündels. Die einzelnen Linien desselben heißen Strahlen. Auch eine Gruppe paralleler Linien läßt sich als ein Strahlenbündel betrachten, wenn man einen unendlich weit gelegenen Punkt als Durchschnittspunkt derselben ansieht.

Fig. 40.



77. Satz. Parallele Querschnitte eines prismatischen Raumes sind congruente Figuren. Die durch sie begrenzten Theile der Seitenflächen sind Parallelogramme.

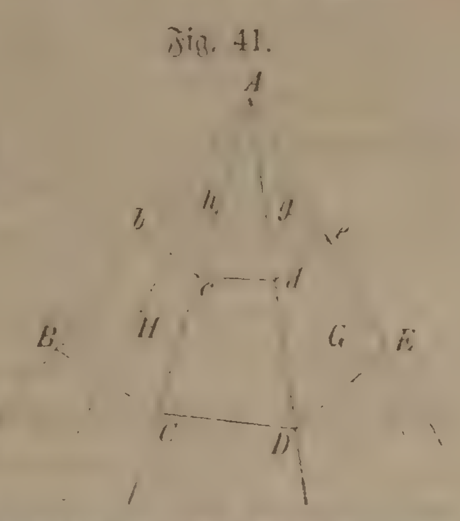
Die Beweise stützen sich auf Satz 39, S. 8 und auf Plan. II. 32.

78. Satz. Sind in einem vierseitigen prismatischen Raume je zwei gegenüber stehende Ebenen einander parallel, so ist der Durchschnitt mit einer beliebigen Ebene ein Parallelogramm.

79. Satz. Wird ein pyramidaler Raum durch zwei beliebige parallele Ebenen geschnitten, so sind die Durchschnittsfiguren ähnliche Polygone.

Beweis. Es seien die Ebenen der Schnitte *BCDEGH* und *bcdegh* des pyramidalen Raumes *A* einander parallel. Um zu beweisen, daß die Polygone *BDG* und *bdg* einander ähnlich sind, wende man S. 39, S. 8 und Planim. V. 39 an.

Fig. 41.



80. Satz. Bei einem pyramidalen Raume verhalten sich die Inhalte der Parallelschnitte wie die Quadrate der vom Scheitel an gerechneten Abschnitte der Strahlen, oder wie die Quadrate der Entfernungen der Ebenen der Querschnitte vom Scheitel.

Der Beweis mit Hülfe von Planim. V. 39 und V. 82 zu führen.

II. Capitel.

Lehre von der Kugelfläche. Sphärik.

Erster Abschnitt.

Erklärungen und Haupteigenschaften der Kreise auf der Kugelfläche.

1. Erklärung. Die Kugel, Sphäre, ist eine körperliche Figur, die von einer einzigen Fläche ringsum so begrenzt ist, daß alle Punkte in dieser Fläche von einem Punkte innerhalb jenes Raumes gleich weit entfernt sind. Die begrenzende Fläche ist die Oberfläche der Kugel, der davon überall gleich weit abstehende Punkt im Innern der Mittelpunkt oder das Centrum der Kugel.

Man kann sich denken, die Kugel entstehe durch vollständige Umdrehung eines Halbkreises um den ihn begrenzenden Durchmesser, wobei die Peripherie des Halbkreises die Oberfläche beschreibt. Die Begriffe des Radius, der Sehne und des Durchmessers einer Kugel entsprechen denen eines Kreises. Die Endpunkte eines Durchmessers heißen Gegenpunkte*) auf der Kugel.

Zusatz 1. Alle Halbmesser einer Kugel sind einander gleich; ebenso alle Durchmesser.

Zusatz 2. Die Kugelfläche hat nur einen Mittelpunkt. Der Beweis hierfür ist dem in Planim. III. 2 für den Kreis geführten ganz entsprechend.

2. Satz. **Eine Gerade kann eine Kugelfläche in nicht mehr als zwei Punkten treffen.**

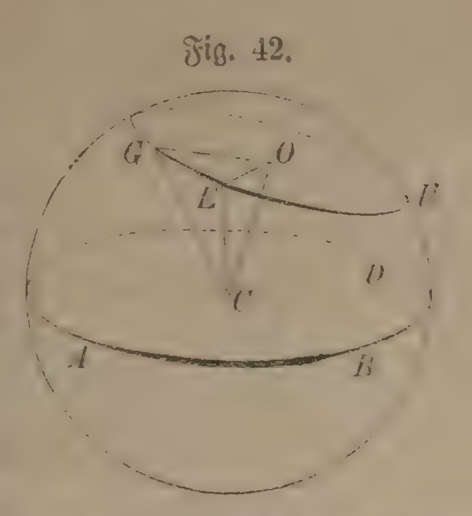
Beweis entsprechend dem in Planim. III. 10.

3. Satz. **Der Durchschnitt einer Kugelfläche mit einer beliebigen Ebene ist ein Kreis.**

*) Beispiele von Gegenpunkten sind Nord- und Südpol der Erd- und der Himmelskugel, Zenith und Nadir.

Man beweise den Satz zuerst für den Fall, daß die Ebene ABD durch den Mittelpunkt C der Kugel geht. Geht die Durchschnittsebene EGH nicht durch den Mittelpunkt, so fälle man von demselben die Senkrechte CO auf die Ebene und verbinde zwei beliebige Punkte E und G der Durchschnittslinie sowohl mit O als mit C. Leicht läßt sich alsdann nachweisen, daß $OE = OG$ ist.

Fig. 42.



Zusatz. Alle Punkte innerhalb des Durchschnittskreises liegen dem Mittelpunkte der Kugel näher, als die Punkte ihrer Oberfläche, alle außerhalb des Kreises in seiner Ebene liegenden Punkte stehen von C weiter ab, als der Halbmesser der Kugel beträgt. Der von der Kreislinie begrenzte Theil liegt daher ganz innerhalb der Kugel, der übrige außerhalb. Die Oberfläche der Kugel ist also eine überall gekrümmte Fläche, d. h. eine Fläche, wovon nicht der kleinste Theil eben ist.

4. Satz. **Kugelkreise, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind gleich und die größten unter allen. Die übrigen Kugelkreise sind um so kleiner, je weiter ihre Ebenen vom Mittelpunkte abstehen.**

Der Beweis ist einfach. Daran knüpft sich die folgende Erklärung.

5. Erklärung. Ein Kugelkreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt ein größter Kreis (Circulus maximus). Die übrigen Kreise heißen kleine Kreise*).

Zusatz 1. Durch zwei Gegenpunkte können unzählige größte Kreise gelegt werden; durch zwei Punkte dagegen, die nicht Gegenpunkte sind, kann nur ein größter Kreis gelegt werden.

Zusatz 2. Heißt R der Radius der Kugel, d die Entfernung der Ebene eines Kugelkreises vom Mittelpunkte der Kugel, r der Radius desselben, so ist $R^2 = d^2 + r^2$. Wird d kleiner, so wird r größer und umgekehrt. Vergl. Planim. III. 15. 16.

*) Beispiele von größten Kreisen sind: Horizont, Meridiankreis, Scheitelkreis, Aequator der Himmels- und der Erdkugel, von kleinen Kreisen die Parallelkreise der Erdkugel, die Wendekreise, Polarkreise.

6. Satz. Die Kugel und ihre Oberfläche wird durch jeden größten Kreis in zwei congruente Theile getheilt, die Halbkugeln heißen.

7. Satz. **Je zwei größte Kreise schneiden sich in zwei Gegenpunkten der Kugel und werden von ihnen halbirt** *).

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem Begriffe des größten Kreises.

8. Satz. **Ein größter Kreis und ein kleiner Kreis, sowie zwei kleine Kreise können sich nicht gegenseitig halbiren.**

Der Satz ist indirect zu beweisen.

9. Erklärung. Unter sphärischer Entfernung zweier Punkte der Kugelfläche ist der von diesen Punkten begrenzte kleinere Bogen eines größten Kreises zu verstehen.

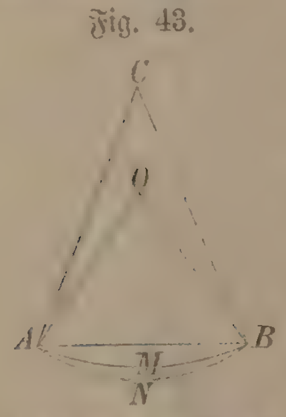
Zusatz 1. Die sphärische Entfernung zweier Gegenpunkte von einander ist ein halber größter Kreis.

Zusatz 2. Die sphärische Entfernung zweier Punkte A und B ist der sphärischen Entfernung ihrer Gegenpunkte A' und B' gleich **).

Beweis leicht mit Hülfe der gleichen Scheitelwinkel.

10. Satz. **Die sphärische Entfernung zweier Punkte der Kugelfläche ist kleiner als jeder von diesen Punkten begrenzte Bogen eines kleinen Kreises.** (Fig. 43.)

Fig. 43.



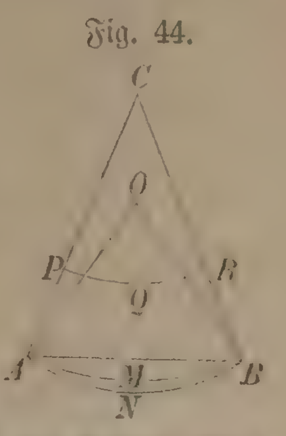
Beweis. Die Punkte seien A und B, der sie verbindende Bogen eines größten Kreises sei AMB, der Mittelpunkt der Kugel C. Man bringe den Sector des durch A und B gehenden Bogens eines kleinen Kreises durch Umdrehung um die gemeinschaftliche Sehne AB in die Ebene des größten Kreises und es sei O der Mittelpunkt, ANB der Bogen dieses kleinen Kreises. Der Mittelpunkt O muß aber nothwendig innerhalb des Dreieckes ACB fallen, der Bogen ANB des kleinen Kreises aber außerhalb des Sectors AMB; der Bogen ANB wird also den Bogen AMB umschließen. Da nun beide Bogen convexe Linien sind, denen man sich durch eingeschriebene gebrochene so weit nähern

*) Beispiel: Der Aequator des Himmels und der Horizont halbiren sich.
**) Beispiel: Die Entfernung des Zeniths vom Nordpol des Himmels ist gleich der Entfernung des Nadirs vom Südpol.

kann, als man will, so ist mit Rücksicht auf den in Planim. VII. 14 aufgestellten Satz Bogen $AMB <$ Bogen ANB.

Verlangt man einen Beweis, der von dieser die Näherung betreffenden Annahme unabhängig ist, so ist er folgender: (Fig. 44.)

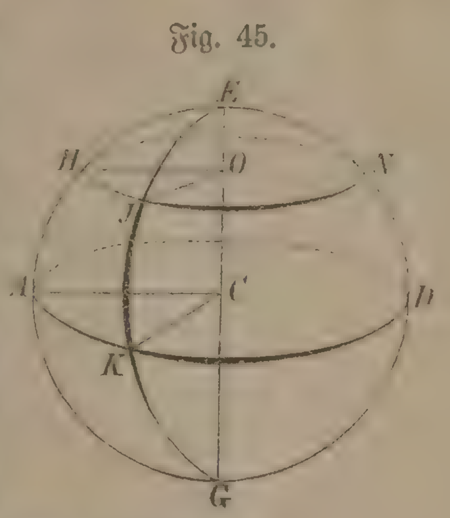
Fig. 44.



Zwischen den Schenkeln des Winkels ACB sei um C als Mittelpunkt und mit einem Radius $CP = OA$ ein dritter Bogen PQR beschrieben. Es ist dann Bogen $AMB : PQR = CA : CP =$ Sehne AB : Sehne PR. Da aber ANB und PQR Bogen sind, welche Kreisen von einerlei Radius angehören und Bogen in größerm Verhältnisse zu einander stehen, als ihre Sehnen (Plan. IX. 41.), so ist Bogen $ANB : PQR >$ Sehne $AB : PR$, folglich auch $AMB : PQR < ANB : PQR$ und daher Bogen $AMB < ANB$.

11. **Satz. Steht ein Durchmesser einer Kugel auf der Ebene eines größten oder eines kleinen Kreises senkrecht, so hat jeder seiner Endpunkte von allen Punkten des größten oder kleinen Kreises gleiche sphärische Entfernungen.** (Fig. 45.)

Fig. 45.



Es stehe EG senkrecht auf der Ebene des größten Kreises AKD und des kleinen Kreises HJN; $EJKG$ und $EHAG$ seien zwei die genannten Kreise in A, K und in H, J schneidende größte Kreise. Daraus, daß $\sphericalangle ECA = ECK = R$ ergibt sich unmittelbar $EA = EK$. Aus der Congruenz der Dreiecke COH und COJ ergibt sich ferner $\sphericalangle HCO = JCO$, also Bogen $HE = JE$.

Der senkrechte Durchmesser EG führt den Namen A ch s e des größten oder des kleinen Kreises.

12. Erklärung. Steht der Durchmesser EG der letzten Figur auf den Ebenen der Kreise AKD und HJN senkrecht, so kann man sich vorstellen, diese Kreise seien durch Umdrehung eines Bogens EA oder EH um den festen Endpunkt E des Durchmessers EG oder des Bogens GA, GH um den festen Punkt G beschrieben. Die Punkte E und G werden deßhalb die sphärischen Mittelpunkte (auch Pole) dieser Kreise, die Bogen EA und EH oder GA und GH die sphärischen Radien genannt. Jeder Kreis auf der Kugel hat

demnach zwei sphärische Mittelpunkte und zwei sich zu 180° ergänzende sphärische Radien. Sind die sphärischen Radien einander gleich, so ist jeder ein Quadrant, und der Kreis ist ein größter Kreis. Zwei Kreise der Kugelfläche, deren Ebenen parallel sind, heißen kurz Parallelkreise. Zwei Parallelkreise haben eine gemeinschaftliche Achse, deren Endpunkte ihre gemeinschaftlichen sphärischen Mittelpunkte sind.

13. Aufgabe. Durch vier nicht in einer Ebene liegende Punkte die Kugel zu legen.

Leicht vermittelst Satz 3.

14. Satz. Der Durchschnitt zweier Kugelflächen ist ein Kreis. Die Centrale beider Kugeln steht auf der Ebene des Durchschnittskreises im Mittelpunkte senkrecht.

Beweis. Fällt man von zwei beliebigen Durchschnittspunkten der Kugelflächen eine Senkrechte auf die Centrale derselben, so läßt sich leicht nachweisen, daß die Fußpunkte der Perpendikel in einem Punkte zusammenfallen, und daß die Perpendikel einander gleich sind. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich hieraus leicht.

15. Satz. Eine Gerade senkrecht auf dem Radius einer Kugel in dem Endpunkte desselben hat mit der Kugelfläche nur einen Punkt gemeinschaftlich, ist also eine Tangente. Ebenso hat eine Ebene, senkrecht auf dem Radius einer Kugel im Endpunkte desselben, nur einen Punkt mit der Kugelfläche gemeinschaftlich, ist also eine Tangentialebene.

Die Beweise entsprechen denen der Planim. III. 12.

Zusatz. Umkehrung. Vergl. Planim. III. 12. Zus. 1, 2, 3.

16. Den Kreissätzen der Planim. III. 25—30 entsprechen ähnliche für die Kugel.

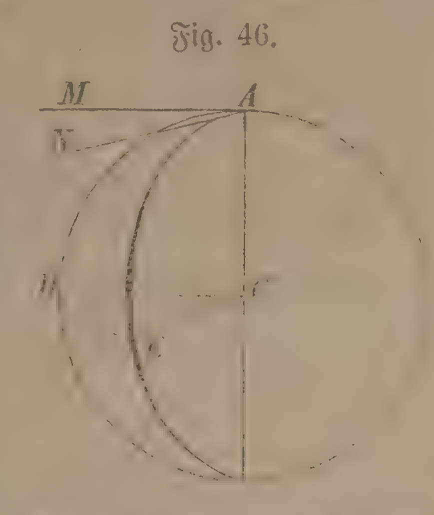
Zweiter Abschnitt.

Die sphärischen Winkel und das sphärische Zweieck.

17. Erklärung. Unter dem Winkel, den zwei sich durchschneidende Kreisbogen bilden, ist der Winkel zu verstehen, den ihre am Durchschnittspunkte gezogenen Tangenten mit einander bilden. Um also den Winkel zu

construiren, den die Bogen AD und AE zweier größten Kreise einer Kugel an ihrem Durchschnittspunkte A bilden, hat man nur in der Ebene eines jeden Perpendikel auf dem Radius CA nach derselben Seite hin, nach der die Bogen liegen, zu errichten, AM und AN. ∢ MAN ist alsdann der Winkel der Bogen AD und AE. Derselbe Winkel ist der Neigungswinkel der Ebenen der beiden größten Kreise (I. 47). Construirt man diesen Neigungswinkel am Mittelpunkte der Kugel, so entspricht demselben ein Bogen DE, der sich zur ganzen Peripherie verhält wie DCE zu 4 R. Es hat also der Winkel A zweier Bogen größter Kreise auf der Kugel zum Maße einen dritten solchen Bogen, welcher die Endpunkte D und E der 90° lang genommenen Schenkelbogen jenes Winkels A verbindet.

Fig. 46.



Zusatz. Die Scheitelwinkel zweier sich schneidenden größten Kreise sind einander gleich.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Figur.

18. Erklärung. Ein von zwei größten Kreisen begrenzter Theil der Kugelfläche heißt ein sphärisches Zweieck. Ein sphärisches Zweieck hat also zwei Seiten, die Halbkreise sind, und zwei Winkel. Zwei größte Kreise bilden, wenn sie vollständig sind, auf der Kugelfläche vier Zweiecke.

Zusatz. Die Winkel eines Zweieckes sind jedesmal einander gleich.

19. Satz. Alle größten Kreise, welche durch den sphärischen Mittelpunkt eines andern größten Kreises gehen, stehen auf diesem letzteren senkrecht *).

Der Beweis leicht durch Construction des Winkels beider Bogen zu führen.

Zusatz 1. Stehen zwei größte Kreise senkrecht auf einander, so geht der eine jedesmal durch den sphärischen Mittelpunkt des andern.

*) Beispiele: Alle durch das Zenith gehende größte Kreise, Scheitelkreise genannt, stehen auf dem Horizonte senkrecht; alle durch einen Pol des Himmels gehende größte Kreise, Declinationskreise genannt, stehen auf dem Aequator des Himmels senkrecht. Die Meridiane der Erdkugel stehen auf dem Aequator der Erde senkrecht.

Zusatz 2. Steht ein Quadrant auf einem durch den einen seiner Endpunkte gehenden größten Kreise senkrecht, so ist der andere Endpunkt der sphärische Mittelpunkt jenes Kreises.

Zusatz 3. Stehen zwei größte Kreise senkrecht auf einem dritten, so ist der Durchschnittspunkt der beiden ersten der sphärische Mittelpunkt des dritten.

20. Satz. **Der Winkel zweier größten Kreise ist entweder der Entfernung ihrer sphärischen Mittelpunkte gleich, oder ergänzt dieselbe zu einem Halbkreise *).**

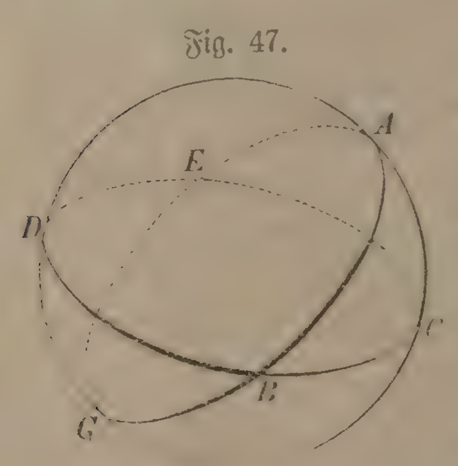
Der Beweis ist auf I. 48 zu stützen.

Dritter Abschnitt.

Das sphärische Dreieck.

21. Erklärung. Ein sphärisches Dreieck ist ein von drei Bogen größter Kreise begrenzter Theil der Kugeloberfläche. Durchschneiden sich drei größte Kreise und sind sie vollständig, so wird die ganze Kugelfläche in acht Dreiecke zerlegt.

Fig. 47.



Diese acht Dreiecke sind *ABC*, *ABD*, *BCG*, *BDG*, *ACE*, *CEG*, *ADE*, *DEG*. Wird ein Theil der Kugelfläche von mehr als drei Bogen größter Kreise begrenzt, so heißt er ein sphärisches Vieleck oder Polygon. — Winkel, Seiten der sphärischen Vielecke. Gleichschenkelige, gleichseitige, ungleichseitige Dreiecke.

Jedem sphärischen Vielecke entspricht ein körperlicher Winkel am Mittelpunkte der Kugel. Die Kanten dieses körperlichen Winkels sind die nach den Ecken des Vieleckes gezogenen Radien. Die Seiten des sphärischen Vieleckes entsprechen den Seiten der körperlichen Ecke

*) Beispiele: An der Himmelskugel ist die Entfernung des Nordpols vom Pole der Ekliptik gleich der Neigung der Ekliptik gegen den Aequator. Die Aequatorhöhe ist gleich der Polardistanz des Zeniths.

und sind das Maß derselben; die Winkel des sphärischen Vieleckes sind zugleich die Neigungswinkel der Seitenflächen der körperlichen Ecke. Dieser Uebereinstimmung wegen lassen sich alle Sätze über Körperecke auf die der sphärischen Vielecke übertragen und in entsprechende für diese umsetzen.

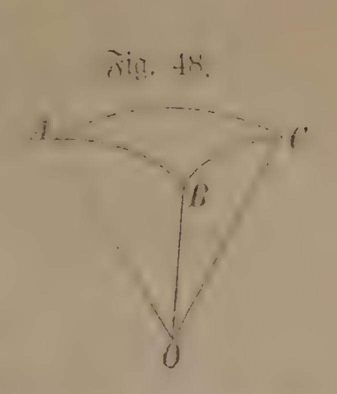


Fig. 48.

Bemerkung. Obgleich sphärische Dreiecke und überhaupt Figuren mit Seiten möglich sind, welche Halbkreise oder noch größer als diese, oder deren innere Winkel größer als 180° sind, so ist doch deren Betrachtung überflüssig, da solche Figuren ganz leicht auf andere sich zurückführen lassen, worin jede Seite kleiner als ein Halbkreis, und jeder Winkel kleiner als 180° ist. Es ist daher im Folgenden überall nur von Figuren der letzten Art zunächst die Rede. Zwei nächste Ecken einer Figur sind daher nie Gegenpunkte.

22. Erklärung. Gegendreieck, Gegenvieleck eines sphärischen Dreieckes oder Vieleckes ist ein zweites Dreieck oder Vieleck, dessen Ecken Gegenpunkte der Ecken des ersten sind. Es entsprechen die Gegenvielecke den Gegenecken (I. 56), *GED*, Fig. 47, ist also das Gegendreieck zu *ABC*.

Zusatz. Gegenvielecke stimmen zwar in den Seiten und Winkeln völlig überein, können jedoch im Allgemeinen nicht zur Deckung gebracht werden, sind also symmetrisch.

23. Erklärung. Verlängert man zwei Seiten eines Dreieckes über die Endpunkte der dritten Seite hinaus, bis sie sich zum zweiten Male treffen, so entsteht ein zweites Dreieck, welches Nebendreieck des ersteren heißt. Verlängert man aber zwei Seiten eines Dreieckes über ihren gemeinschaftlichen Endpunkt hinaus, bis sie mit der verlängerten dritten Seite zusammentreffen, so heißt das so gebildete Dreieck das Scheiteldreieck jenes ersten. Das Dreieck *ABC* (Fig. 47) hat also drei Nebendreiecke *BCG*, *ABD* und *ACE* und drei Scheiteldreiecke *BDG*, *CEG* und *ADE*.

24. Satz. Zwei Nebendreiecke sowohl, als zwei Scheiteldreiecke haben eine Seite und den dieser Seite gegenüberstehenden Winkel gleich; die übrigen Seiten und Winkel ergänzen sich aber paarweise zu 180°.

Der Beweis ergibt sich leicht unmittelbar aus der Figur.

25. Satz. Zwei Seiten eines sphärischen Dreieckes sind zusammen genommen größer, als die dritte Seite.

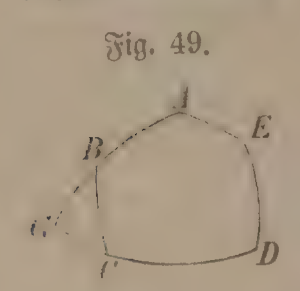
Zusatz. Der Unterschied zweier Seiten ist kleiner als die dritte Seite.

Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus I. 62.

26. Satz. **Der Umfang eines sphärischen Dreieckes, überhaupt eines sphärischen Vieleckes, ist kleiner, als ein größter Kreis.**

Der Beweis ergibt sich aus I. 63. Ein zweiter Beweis ergibt sich durch folgende Betrachtung:

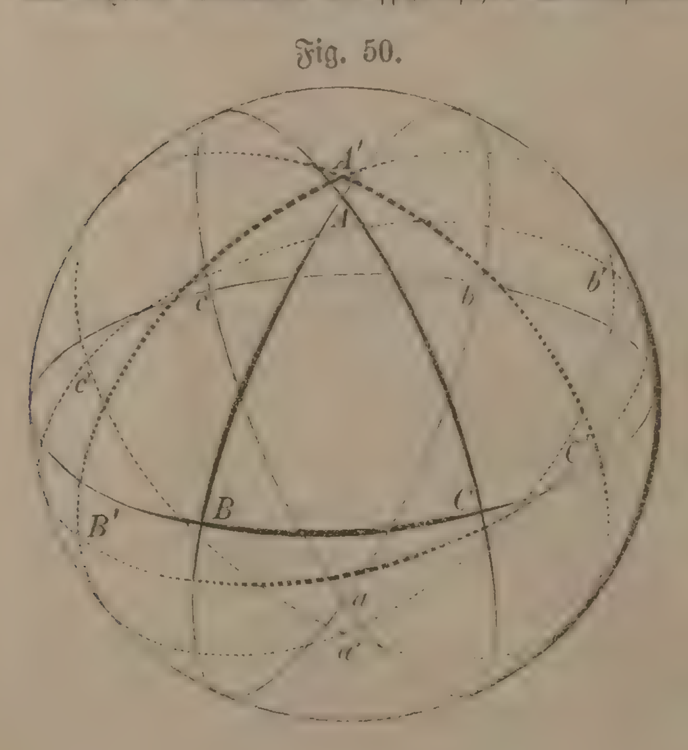
Fig. 49.



Verlängert man zwei Seiten AB und DC eines n-Eckes, $ABCDE$, zwischen welchen eine dritte liegt, über die Endpunkte der letztern hinaus, bis sie sich treffen, so entsteht ein $n-1$-Eck, von dem sich zeigen läßt, daß sein Umfang größer, als der des n-Eckes ist. Geht man auf diese Weise vom $n-1$-Eck zum $n-2$, $n-3$ u. s. w. -Ecke über, so gelangt man zum Dreiecke und endlich zum Zweiecke, dessen Umfang gleich der Peripherie eines größten Kreises ist. Da bei abnehmender Zahl der Seiten diese Vielecke an Umfang zunehmen, so hat also das Zweieck den größten Umfang, d. h. die Peripherie eines größten Kreises.

27. Satz. **Sind die Ecken eines Dreieckes die sphärischen Mittelpunkte der Seiten eines andern Dreieckes, so sind auch umgekehrt die Ecken des letztern Dreieckes die sphärischen Mittelpunkte der Seiten des erstern.**

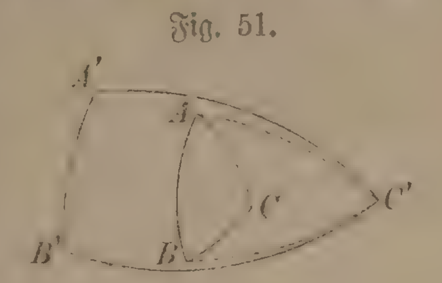
Fig. 50.



Es sei ABC (Fig. 50) ein sphärisches Dreieck, $A'B'C'$ ein zweites, und es seien A, B und C die sphärischen Mittelpunkte der Seiten $B'C'$, $A'C'$ und $A'B'$ des zweiten Dreieckes; die Punkte A', B' und C' werden alsdann umgekehrt die sphärischen Mittelpunkte der Seiten des Dreieckes ABC sein. Der Beweis fällt mit dem frühern in I. 59 aufgestellten zusammen, wenn

man in dem Satze von der dreikantigen Körperecke an die Stelle der Seitenflächen der Ecken die Seiten der Dreiecke u. s. w. setzt. Der Beweis ergibt sich auch unmittelbar an der Figur. A (Fig. 51) ist sphärische Mitte von $B'C'$, also $AC' = 90^o$; ferner ist B sphärische Mitte von $A'C'$, mithin $BC' = 90^o$. Da nun sowohl $C'A$ als $C'B = 90^o$, so ist C' sphärische Mitte von AB.

Fig. 51.



28. **Erklärung.** Da die drei Kreise, welche durch je zwei der Punkte A', B' und C' gehen, die ganze Kugeloberfläche in 8 Dreiecke theilen, so gibt es eben so viele Dreiecke, deren Ecken sphärische Mittelpunkte der Seiten des Dreieckes ABC sind. So gehören in obiger Fig. 50 zu den drei größten Kreisen $ABab$, $ACac$ und $BCbc$, welche die Kugeloberfläche in 8 Dreiecke ABC, ABc, ACb, BCa, abC, acB, bcA und abc theilen, drei andere größte Kreise $A'B'a'b'$, $A'C'a'c'$ und $B'C'b'c'$, deren Durchschnittspunkte je zwei und zwei, nämlich A' und a', B' und b', C' und c' bezüglich sphärische Mittelpunkte der drei ersten Kreise sind; mithin sind auch umgekehrt die Durchschnittspunkte dieser letztern die Mittelpunkte des zweiten Systems von größten Kreisen, welche die Kugeloberfläche abermals in acht Dreiecke theilen. Als reciprok stellen sich folgende Dreiecke heraus:

1) ABC und $A'B'C'$, 2) ABc und $A'B'c'$, 3) BCa und $B'C'a'$, 4) CAb und $C'A'b'$, 5) abc und $a'b'c'$, 6) abC und $a'b'C'$, 7) bcA und $b'c'A'$, 8) caB und $c'a'B'$.

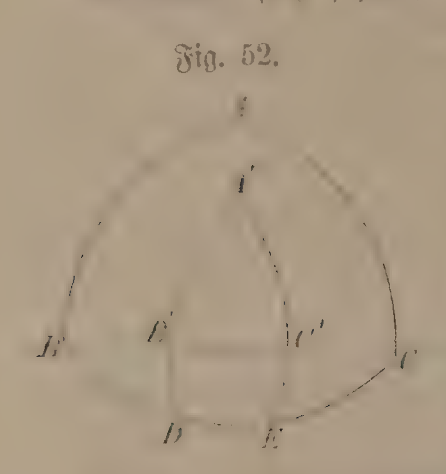
Von den beiden Mittelpunkten der Seite oder des Kreises BC liegt aber nur einer, nämlich A', mit dem Dreiecke ABC auf derselben durch BC gebildeten Halbkugel. Dieser Mittelpunkt A' heiße zum Unterschiede von seinem Gegenpunkte der homologe Mittelpunkt von BC, desgleichen ist B' der homologe von AC, C' der von AB. Dann ist aber unter den erwähnten 8 Dreiecken $A'B'C'$ allein dasjenige, dessen Ecken alle drei homologe Mittelpunkte der Seiten des Dreieckes ABC sind. Zwei Dreiecke, wie ABC und $A'B'C'$ von der Beschaffenheit, daß die Ecken des einen sphärische homologe Mittelpunkte der Seiten des andern sind, heißen reciproke Dreiecke (auch wohl Polardreiecke). Die den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ entsprechenden körperlichen Ecken sind aber nach dem in I. 60 aufgestellten Begriffe reciproke körperliche Ecken. Nach jenem Begriffe der reciproken Ecke könnte man aber auch das Gegendreieck von $A'B'C'$, nämlich $a'b'c'$, das

reciproke Dreieck von ABC nennen. Der Begriff der Reciprocität kann auch auf sphärische Polygone ausgedehnt werden.

29. Satz. Zwei reciproke sphärische Dreiecke und Vielecke stehen in einem solchen Zusammenhange mit einander, daß jede Seite des einen den **entsprechenden Winkel des andern zu 180° ergänzt.**

Der Beweis stützt sich auf Satz 20 dieses Capitels oder auf I. 61.

Fig. 52.



Will man sich an sphärische Dreiecke halten, so verlängere man, wo nöthig, nur zwei Seiten des einen der reciproken Dreiecke ABC und $A'B'C'$ bis zum Zusammentreffen mit der dritten Seite des anderen, z. B. $A'B'$ und $A'C'$ bis D und E auf BC, dann ist $BE = 90°$, $DC = 90°$, daher $BC + DE = 180°$. Nach 17 ist aber der Bogen DE das Maß des Winkels A', mithin ist $BC + \sphericalangle A' = 180°$.

Zusatz 1. Ist ein Winkel eines Dreieckes ein rechter, so hat das reciproke Dreieck eine Seite, welche ein Quadrant ist.

Zusatz 2. Stimmen zwei Dreiecke in allen Seiten und Winkeln überein, so stimmen auch ihre reciproken Dreiecke in allen Winkeln und Seiten überein.

Beweise leicht.

30. Satz. Die Summe aller Winkel eines convexen sphärischen n-Eckes ist größer als $2(n-2)R$ und kleiner als $2nR$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus I. 64.

Zusatz. Die Summe aller Winkel eines sphärischen Dreieckes liegt zwischen 2 und 6 Rechten.

31. Satz. Die Summe zweier Winkel eines sphärischen Dreieckes ist kleiner, als der um zwei Rechte vermehrte dritte Winkel.

Beweis. Es sei ABC ein sphärisches Dreieck, $A'B'C'$ das reciproke Dreieck, alsdann ist:

$$A'B' + A'C' > B'C', \text{ mithin}$$
$$2R - C + 2R - B > 2R - A, \text{ folglich:}$$
$$2R + A > B + C.$$

32. **Satz. Ein äußerer Winkel an einem sphärischen Dreiecke ist kleiner, als die Summe der beiden ihm gegenüber stehenden innern Winkel, und größer als ihr Unterschied.**

Die Beweise ergeben sich mit Hülfe von 30. Zus. und 31.

33. Erklärungen. a) Ist ein Winkel eines sphärischen Dreieckes ein rechter, so heißt es in Beziehung auf ihn rechtwinkelig. Ein sphärisches Dreieck kann in Beziehung auf nur einen, auf zwei, auf drei Winkel rechtwinkelig sein. b) Ist eine Seite eines Dreieckes ein Quadrant, so heißt es in Bezug auf diese Seite ein rechtseitiges. c) Stimmen zwei sphärische Dreiecke in allen Seiten und Winkeln der Ordnung nach überein, und folgen die gleichen Stücke in gleicher Richtung aufeinander, so heißen sie congruent. d) Stimmen aber zwei sphärische Dreiecke in allen Seiten und Winkeln der Ordnung nach überein, ist die Richtung aber, in welcher die gleichen Stücke auf einander folgen, eine entgegengesetzte, so lassen sie sich im Allgemeinen nicht so aufeinander legen, daß sie sich decken, und in diesem Falle heißen sie symmetrisch.

Zusatz. Zwei Gegendreiecke sind immer symmetrisch. Um also zu einem Dreiecke das symmetrische zu construiren, hat man nur nöthig, das Gegendreieck zu bilden.

34. **Satz. Stimmen zwei sphärische Dreiecke in zwei Seiten und dem von ihnen gebildeten Winkel überein, so stimmen sie auch in der dritten Seite und den beiden übrigen Winkeln überein, sind also entweder congruent oder symmetrisch.**

Der Beweis ist entweder auf I. 66 zurückzuführen, indem man die den sphärischen Dreiecken entsprechenden Körperwinkel construirt oder direct durch Aufeinanderlegen, entsprechend Planim. II. 8, zu führen, wobei man aber noch den Fall der Symmetrie der Dreiecke zu berücksichtigen hat. Man zeige nämlich in diesem Falle, daß das eine Dreieck congruent ist dem Gegendreiecke des andern.

35. **Satz. Stimmen zwei sphärische Dreiecke in einer Seite und den beiden daran liegenden Winkeln überein, so stimmen sie auch in dem dritten Winkel und den beiden übrigen Seiten überein und sind entweder congruent oder symmetrisch.**

Die Beweise sind ebenso zu führen, wie die für Satz 34. Durch die Eigenschaft der reciproken Dreiecke kann übrigens dieser Satz auch auf den vorhergehenden zurückgeführt werden.

36. Satz. **Gleichen Seiten eines sphärischen Dreieckes liegen gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt.**

Der Beweis ist auf I. 65 zu stützen. Entsprechend dem Beweise für das ebene Dreieck in der Planim. II. 2 kann auch der Beweis geführt werden, wenn man zu dem gegebenen Dreiecke das Gegendreieck construirt.

37. Satz. **Stimmen zwei sphärische Dreiecke in den drei Seiten überein, so stimmen sie auch in den drei Winkeln überein und sind entweder congruent oder symmetrisch.**

Der Beweis wie 34 oder auch entsprechend Planim. II. 10.

38. Satz. **Stimmen zwei sphärische Dreiecke in den drei Winkeln überein, so stimmen sie auch in den drei Seiten überein und sind entweder congruent oder symmetrisch.**

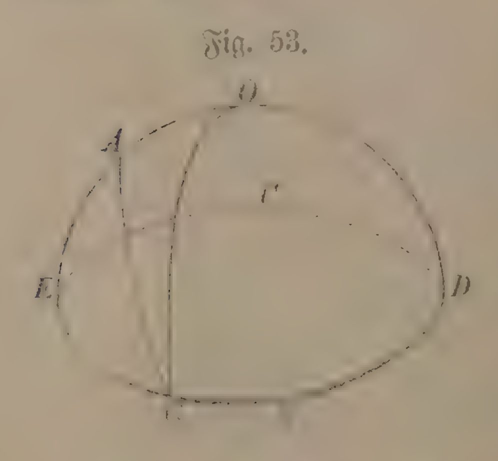
Mit Hülfe der reciproken Dreiecke zu beweisen.

39. Satz. **Ungleichen Seiten eines sphärischen Dreieckes stehen auch ungleiche Winkel gegenüber und zwar der größeren Seite ein größerer Winkel und umgekehrt.**

Der Beweis ist auf I. 65 zu stützen.

40. Satz. **Unter allen Bogen größter Kreise, die sich von einem Punkte außerhalb des sphärischen Mittelpunktes eines größten Kreises nach diesem hinziehen lassen, ist der senkrechte, wenn er kleiner als ein Quadrant ist, der kürzeste, und wenn er größer als ein Quadrant ist, der längste.** (Fig. 53.)

Fig. 53.



Es sei *BECD* ein größter Kreis, *O* dessen sphärischer Mittelpunkt; der durch *O* gehende größte Kreis steht also auf *BEC* senkrecht. Zieht man von einem beliebigen zwischen *O* und *BDE* liegenden Punkte *A* nach *BECD* einen Bogen eines größten Kreises *AG*, so läßt sich leicht, wenn man noch den Quadranten *OG* zieht, mit Hülfe von 39 nachweisen, daß $AD > AG > AE$ sei.

Zusatz. Der Bogen *AE* bildet also den kürzesten Abstand des Punktes *A* von dem größten Kreise *BECD* und wird deshalb der sphärische Abstand des Punktes *A* vom Bogen *EBC* genannt.

41. **Satz.** Steht ein größter Kreis auf dem Bogen eines andern in dessen Mitte senkrecht, so hat jeder Punkt des ersteren von den Endpunkten des Bogens gleiche sphärische Abstände, jeder Punkt außerhalb jenes Kreises aber hat ungleiche Abstände.

Der Beweis des ersten Theiles ist auf 34, der des zweiten Theiles auf 25 zu gründen.

Zusatz. Der Ort aller Punkte auf der Kugel, die von zwei Punkten derselben gleiche sphärische Entfernungen haben, ist ein größter Kreis, der auf dem die Punkte verbindenden Bogen in dessen Mitte senkrecht steht.

42. **Satz.** Halbirt ein größter Kreis den Winkel zweier anderer, so hat jeder Punkt des ersteren gleiche Abstände von den beiden letzteren.

Beweis. Die beiden durch die Schenkel des halbirten Winkels, die Halbirungslinie und die Abstände gebildeten Dreiecke sind symmetrisch. Gesetzt, sie seien nicht symmetrisch, alsdann ließe sich nach 34 ein Dreieck construiren, welches einem derselben symmetrisch wäre u. s. w.

43. **Aufgabe.** Durch eine sphärische Construction a) auf einem gegebenen Bogen eines größten Kreises in einem gegebenen Punkte desselben die Senkrechte zu errichten, b) von einem Punkte außerhalb eines größten Kreises die Senkrechte auf denselben zu ziehen, c) einen gegebenen Winkel in zwei gleiche Theile zu theilen.

Die Constructionen entsprechen denen der Planim. II. 23. 24. 22.

44. **Aufgabe.** Den sphärischen Mittelpunkt a) des einem sphärischen Dreiecke umgeschriebenen, b) des demselben eingeschriebenen Kreises zu finden.

Die Constructionen gleich denen der Planim. III. 32 und 33. Auf der Kugelfläche gibt es acht Kreise, welche die Seiten des Dreieckes selbst oder deren Verlängerungen berühren.

45. **Satz.** Geht eine Seite eines sphärischen Dreieckes durch die sphärische Mitte des umgeschriebenen Kreises, so ist der gegenüber stehende Winkel der Summe der beiden andern Winkel gleich.

Zum Beweise verbinde man den sphärischen Mittelpunkt des Kreises mit der Spitze des dem Durchmesser gegenüber stehenden Winkels.

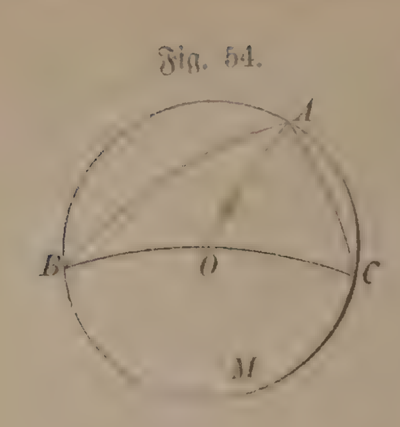


Fig. 54.

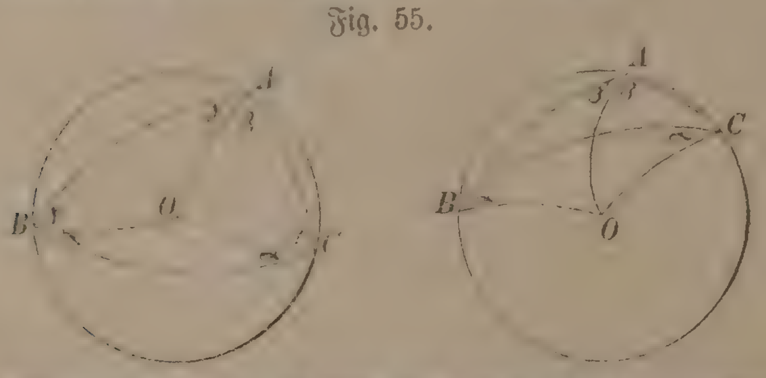
Zusatz. Betrachtet man das von BC und dem halben Umfange BAC des kleinen Kreises begrenzte Stück der Oberfläche als Halbkreis, so kann man analog mit Plan. III. 19, Zusatz 1 sagen, der Peripheriewinkel BAC auf dem Halbkreise BMC ist immer größer als ein Rechter. Wäre der Bogen BMC größer oder kleiner als ein Halbkreis, so würde auch A größer oder kleiner als $B + C$ sein.

46. Satz. In einem sphärischen Kreisvierecke ist die Summe zweier gegenüber stehender Winkel gleich der Summe der beiden andern.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Figur, wenn man den Mittelpunkt des sphärischen Vierecks durch Bogen größter Kreise mit den Eckpunkten verbindet.

47. Satz. Die von der sphärischen Mitte des einem Dreiecke umgeschriebenen Kreises nach zwei Endpunkten einer Seite gezogenen sphärischen Radien bilden mit dieser Seite Winkel halb so groß als der Ueberschuß der zwei anliegenden Dreieckswinkel über den dritten.

Fig. 55.



Liegt der Mittelpunkt O des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises innerhalb des Dreieckes, so ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(B + C - A)$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(A + C - B)$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(A + B - C).$$

Liegt der Mittelpunkt O aber außerhalb des Dreieckes, so ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(A - B - C)$$
$$\beta = \tfrac{1}{2}(A + C - B)$$
$$\gamma = \tfrac{1}{2}(A + B - C).$$

Die Beweise leicht.

48. **Satz.** **Bei allen sphärischen Dreiecken ABC und ADC, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie AC haben, und deren Spitzen im Umfange eines kleinen Kreises $ADBCA$ liegen, ist der Unterschied zwischen der Summe der Winkel an der Grundlinie und dem Winkel an der Spitze constant.**

Der Beweis ergibt sich aus der obigen Formel für β.

Für $\triangle\ ABC$ ist

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,(BAC + BCA - B).$$

Für das mit ABC auf derselben Seite liegende Dreieck ADC ist

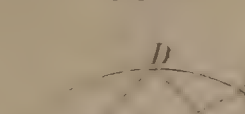
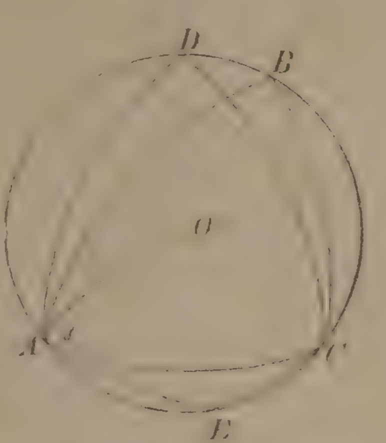
$$\beta = \tfrac{1}{2}\,(DAC + DCA - D),$$

und endlich für das mit ABC auf verschiedener Seite der Grundlinie AC liegende Dreieck AEC ist

$$\beta = \tfrac{1}{2}\,(AEC - EAC - ECA).$$

Durch Zusammenstellung der verschiedenen Ausdrücke für β erhält man die obige Behauptung.

Fig. 56.

49. Aufgabe. Den geometrischen Ort für die Spitzen aller Dreiecke zu finden, die eine gemeinschaftliche Grundlinie und gleiche Winkelsumme haben *).

Auflösung. Das gegebene Dreieck sei ABC; man bilde das Scheiteldreieck BDE, alsdann ist

$$\sphericalangle\ ABC = DBE,$$
$$\sphericalangle\ BAC = 2\ R - BDE$$
$$\sphericalangle\ BCA = 2\ R - BED;$$

hieraus ergibt sich

$$\sphericalangle\ ABC + BAC + BCA = 4\ R - (BDE + BED - DBE).$$

Soll nun die Summe der Winkel des Dreiecks ABC immer dieselbe sein, so muß es auch die Differenz $BDE + BED - DBE$ sein; es muß also nach 48 der Punkt B im Umfange des durch B, E und D gezogenen kleinen Kreises liegen. Beschreibt man also durch die Spitze B

Fig. 57.



*) Dieser schöne Satz wurde zuerst von Lexell gefunden (Acta Petropolitan. 1781. I. p. 112.

des der Grundlinie AC gegenüber stehenden Winkels und durch die Gegenpunkte D und E der Endpunkte A und C der Grundlinie einen kleinen Kreis, so wird derselbe der verlangte geometrische Ort sein.

Vierter Abschnitt.

Vergleichung des Inhaltes der Kugel-Zweiecke, -Dreiecke und -Vielecke mit der ganzen Kugelfläche und unter sich.

50. Satz. **Zwei Kugelzweiecke auf derselben Kugelfläche, deren Winkel einander gleich sind, haben gleichen Inhalt.**

Durch Deckung zu beweisen.

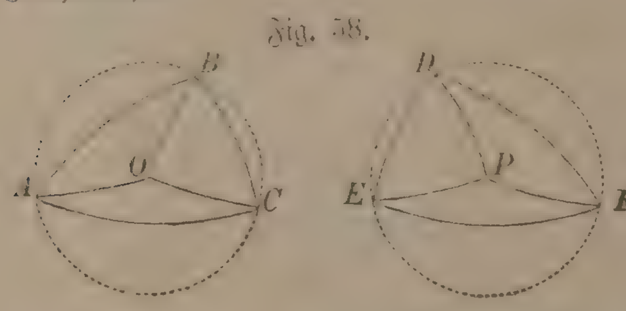
51. Satz. **Die Fläche des Kugelzweieckes verhält sich zur ganzen Oberfläche der Kugel, wie der Winkel des Zweieckes zu 4 Rechten.**

Der Beweis ist in ähnlicher Art zu führen wie Planim. VI. 23.

Zusatz. Der Winkel des Zweieckes ist daher das Maß für seinen Flächeninhalt, und Zweiecke auf derselben Kugelfläche verhalten sich zu einander wie ihre Winkel.

52. Satz. **Symmetrische Dreiecke oder Vielecke haben gleichen Flächeninhalt.**

Fig. 58.



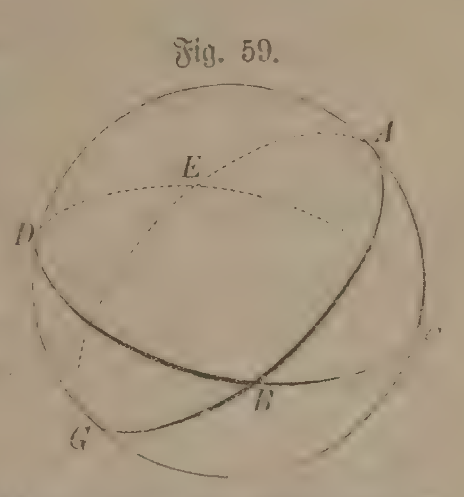
Beweis. Es sei Dreieck ABC dem Dreiecke DEF symmetrisch, $AB = DF$, $BC = DE$ u. s. w. O sei der sphärische Mittelpunkt des Dreieckes ABC, P der des Dreieckes DEF. Die Punkte P und O liegen, wie sich aus 47 ergibt, zugleich innerhalb oder zugleich außerhalb des Dreieckes. Zieht man AO, BO, CO, DP, EP, FP, so läßt sich leicht nachweisen, daß die Dreiecke AOB und DPF als gleichschenkelige Dreiecke nicht nur symmetrisch, sondern auch congruent sind, daher gleichen Flächeninhalt haben. Ebenso ist $\triangle BOC = DPE$ und $\triangle AOC = EPF$. Durch Addition (oder Subtraction) ergibt sich die Gleichheit des Inhaltes der Dreiecke ABC und FDE.

Der Beweis für die Gleichheit symmetrischer Vielecke ergibt sich leicht durch Zerlegung derselben in symmetrische Dreiecke.

Zusatz. Jedes sphärische Dreieck oder Vieleck ist seinem Gegen-Dreiecke oder -Vielecke an Inhalt gleich.

53. Satz. **Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes verhält sich zu dem der ganzen Kugel, wie der Ueberschuß seiner Winkel zusammen über 2 Rechte zu 8 Rechten.**

Fig. 59.



Beweis. ABC (Fig. 59) sei ein sphärisches Dreieck, die Seiten desselben seien zu vollständigen Kreisen verlängert, so daß G, E und D die Gegenpunkte von A, B und C werden. Die halbe Kugelfläche $ACGDA$ besteht aus dem Dreiecke ABC, seinen zwei Nebendreiecken ABD und BCG nebst dem Scheiteldreiecke BDG, welches seinem Gegendreiecke ECA an Inhalt gleich ist (52 Zus.). Letzteres Dreieck ist aber das dritte Nebendreieck von ABC. Das Dreieck ABC macht mit jedem seiner Nebendreiecke ein Zweieck aus. Daher ist nach S. 51, wenn O die Oberfläche der Kugel bezeichnet:

$$\triangle\ ABC + BCG : O = \measuredangle\ A : 4\ R,$$
$$\triangle\ ABC + ECA : O = \measuredangle\ B : 4\ R \text{ und}$$
$$\triangle\ ABC + ABD : O = \measuredangle\ C : 4\ R,$$

folglich auch nach Planim. V. 33:

$$2\ \triangle\ ABC + \tfrac{1}{2}\ O : O = \measuredangle\ A + B + C : 4\ R,$$

woraus sich leicht

$$\triangle\ ABC : O = \measuredangle\ A + B + C - 2\ R : 8\ R$$

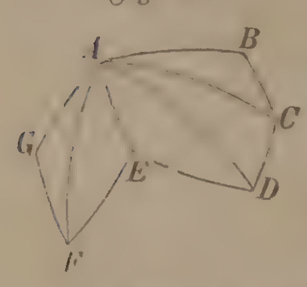
ergibt.

Bemerkung. Den Ueberschuß der Summe der Winkel eines sphärischen Dreieckes über 2 Rechte nennt man auch kurz den sphärischen Ueberschuß oder den sphärischen Exceß. Nimmt man den Kugeloctanten (das von 3 Quadranten eingeschlossene Dreieck), welcher der achte Theil der Kugel ist, als Flächeneinheit und drückt die Winkelsumme des Dreieckes in rechten Winkeln aus, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes gleich dem sphärischen Exceß.

Zusatz. Alle Dreiecke auf derselben Kugel, die gleiche Winkelsumme haben, haben auch gleichen Flächeninhalt.

54. **Satz.** **Der Flächeninhalt eines sphärischen Polygones verhält sich zu dem der ganzen Kugel, wie der Ueberschuß der Summe seiner Winkel über zweimal so viel rechte Winkel, als die um zwei verminderte Seitenzahl des Polygones beträgt, zu 8 Rechten.** (Fig. 60.)

Fig. 60.



Beweis. *ABCDEFG* sei ein beliebiges sphärisches Polygon von n Seiten. Die Summe der n Winkel *ABC, BCD, CDE* u. s. w. sei gleich S. Theilt man das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, so entstehen jedenfalls, wie man auch diese Diagonalen ziehen mag, $n - 2$ Dreiecke. Es ist aber, wenn die Oberfläche der Kugel O heißt:

$\triangle ABC : O = \sphericalangle CAB + ABC + BCA - 2R : 8R$,

$\triangle ACD : O = \sphericalangle DAC + ACD + CDA - 2R : 8R$,

$\triangle ADE : O = \sphericalangle EAD + ADE + DEA - 2R : 8R$ u. s. w.,

mithin (nach Planim. V. 33):

$$ABCDEFG : O = S - 2(n - 2)R : 8R.$$

Zusatz. Ist Σ die Summe der Außenwinkel eines sphärischen convexen Polygones, so verhält sich der Inhalt des Polygones zur Kugeloberfläche wie $4R - \Sigma$ zu $8R$.

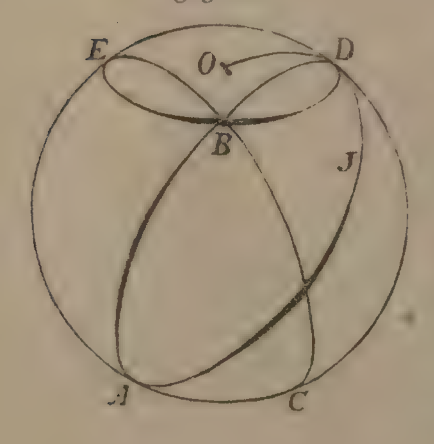
55. **Satz.** **Der geometrische Ort für die Spitzen aller sphärischen Dreiecke, welche mit einem gegebenen dieselbe Grundlinie und gleichen Inhalt haben, ist ein kleiner Kreis, der durch die Spitze des Dreieckes und die Gegenpunkte der Endpunkte der Grundlinie geht.**

Der Beweis stützt sich auf 49 und 53, Zusatz.

56. **Aufgabe.** **Ein gegebenes sphärisches Dreieck in ein gleiches gleichschenkeliges zu verwandeln.**

Die Auflösung stützt sich auf 55 und 41.

Fig. 61.



57. **Aufgabe.** **Ein gegebenes Dreieck in ein ihm an Inhalt gleiches Zweieck zu verwandeln.**

Auflösung. Da das Dreieck sich zur Oberfläche der Kugel wie sein sphärischer Exceß zu $8R$ verhält, so kommt es nur darauf an, ein Zweieck zu construiren, dessen Winkel der Hälfte jenes Excesses gleich ist. Um diesen letzteren zu construiren, kann man sich eines der Scheiteldreiecke des Dreieckes *ABC* (Fig. 61),

z. B. des an B liegenden Scheiteldreieckes BDE bedienen, durch die Ecken desselben einen Kreis beschreiben und die sphärische Mitte desselben O mit D oder E verbinden, es sei mit D; dann ist der sphärische Exceß des Dreieckes $ABC = 2\,R - (BDE + DEB - EBD) = 2\,R - 2\,ODE$ (S. 47). Der halbe Exceß ist also $= R - ODE$. Hiernach hat man, um das verlangte Zweieck zu erhalten, nur durch A und D einen halben größten Kreis DJA zu ziehen, der in D senkrecht auf OD steht; derselbe bildet mit DCA das verlangte Zweieck.

58. **Aufgabe. Ein gegebenes sphärisches Viereck oder Vieleck in ein ihm gleiches Dreieck zu verwandeln.**

Auflösung entsprechend Planim. IV. 19.

III. Capitel.

Polyeder. Eigenschaften, welche die Gestalt derselben betreffen.

Erster Abschnitt.

Erklärungen. Zahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen.

1. Erklärung. Polyeder wird jeder überall von ebenen Flächen umschlossene Raum genannt. Die einzelnen begrenzenden ebenen Figuren heißen Seitenflächen des Polyeders; diese bilden in ihrer Gesammtheit die Oberfläche, die Grenzlinien der Seitenflächen werden Kanten genannt, die Endpunkte der Kanten sind die Ecken des Polyeders.

Zusatz. An jeder Ecke liegt ein von wenigstens 3 Seitenflächen gebildeter Körperwinkel. Werden die Seitenflächen eines dreiseitigen Körperwinkels durch eine vierte Ebene geschnitten, so entsteht das einfachste Polyeder, das Vierflach, Tetraeder.

2. Erklärungen. Prisma wird jedes Polyeder genannt, wovon zwei Grenzflächen unter sich parallel sind, die übrigen aber in Kanten zusammenstoßen, die alle unter sich parallel sind. Man erhält ein Prisma durch den Durchschnitt eines prismatischen Raumes (I. 74) durch zwei parallele Ebenen. Jene unter sich parallelen Grenzflächen sind die Grundflächen des Prisma; ihr senkrechter Abstand von einander heißt seine Höhe. Die übrigen Grenzflächen werden Seitenflächen genannt, die Linien, worin sie zusammenstoßen, Seitenkanten, die Seiten der Grundflächen Grundkanten.

Ein Prisma heißt 3, 4, 5, . . . n seitig, je nachdem die Grundflächen 3, 4, 5 . . . n Seiten haben.

Stehen die Seitenkanten und daher auch die Seitenflächen senkrecht auf einer der Grundflächen und daher auch auf der andern, so heißt das Prisma ein senkrechtes, in jedem andern Falle ein schiefes.

Ein vierseitiges Prisma, dessen gegenüber stehende Seitenflächen einander parallel laufen, wird ein Parallelepipedum genannt. Nach I. 78 sind die Grundflächen eines Parallelepipedums Parallelogramme.

Ist dasselbe senkrecht und die Grundfläche ein Rechteck, so ist das Parallelepipedum ein rechtwinkeliges. Ist die Grundfläche ein Quadrat und die Höhe der Seite dieses Quadrates gleich, so heißt das rechtwinkelige Parallelepipedum ein Würfel oder Cubus (regelmäßiges Hexaeder).

Zusatz. Die beiden Grundflächen eines jeden Prisma sind nach I. 77 congruente Figuren, alle Seitenkanten sind von gleicher Länge, und alle Seitenflächen sind Parallelogramme.

3. Erklärungen. Unter Pyramide versteht man ein Polyeder, dessen eine Grenzfläche ein beliebiges Vieleck, die übrigen aber alle Dreiecke sind, die in einer Ecke zusammenstoßen. Dieser Dreiecke sind nothwendig so viele, als jenes Vieleck Seiten hat, sie bilden die Seitenflächen der Pyramide, während das Vieleck, woran sie stoßen, die Grundfläche der Pyramide heißt. Die gemeinschaftliche Ecke jener Dreiecke ist der Scheitel oder die Spitze der Pyramide. Der senkrechte Abstand des Scheitels von der Grundfläche ist die Höhe derselben. Die vom Scheitel nach den übrigen Ecken gehenden Kanten heißen Seitenlinien oder Seitenkanten, die übrigen Grundkanten.

Je nachdem die Grundfläche eine 3, 4, 5 . . . n seitige Figur ist, heißt die Pyramide eine 3, 4, 5 . . . n seitige. Eine dreiseitige Pyramide heißt auch Tetraeder (Vierflach). Ist die Grundfläche einer Pyramide eine reguläre Figur, und trifft die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte dieselbe im Mittelpunkte, so heißt die Pyramide eine reguläre, auch gleichseitige.

Man erhält eine Pyramide, wenn man einen pyramidalen Raum durch eine Ebene schließt, und umgekehrt erhält man einen pyramidalen Raum, wenn man die Seitenflächen einer Pyramide über die Grundfläche hinaus unbegrenzt fortsetzt. — Daher die Benennung pyramidaler Raum. (I. 75.)

4. Erklärung. Schneidet man von einer Pyramide mittelst einer der Grundfläche parallelen Ebene eine kleinere Pyramide ab, so heißt der übrig bleibende Körper eine abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide.

5. Erklärung. Unter Obelisk wird ein Körper verstanden, der begrenzt wird von zwei parallelen Grundflächen und außerdem von Trapezen, Parallelogrammen oder Dreiecken, die als Seitenflächen an jene anstoßen. Um die Bildung solcher Obelisken einzusehen, denke man sich (Fig. 62) in zwei parallelen Ebenen zwei n-Ecke $ABCDEG$ und $abcdeg$, deren Seiten bezüglich einander parallel sind, und lege durch je zwei entsprechende Parallelseiten eine Ebene. Es entsteht dadurch ein n-seitiger Obelisk, der von zwei n-Ecken, deren Winkel bezüglich einander gleich sind, und von n Seitenflächen, welche sämmtlich Trapeze oder Parallelogramme sind, begrenzt wird. Es gibt aber auch Obelisken, deren Seitenflächen nicht alle Trapeze oder Parallelogramme, sondern theilweise oder alle Dreiecke sind. Man kann sich die dreiseitige Seitenfläche aus der vierseitigen durch Verschwinden einer Seite der letzteren entstanden denken. Der Körper $ACEb$ Fig. 63 z. B. ist begrenzt von einem Sechsecke $ABCDEG$ und einem parallelen Dreiecke abd; $ab \parallel AB$, $bd \parallel CD$, $da \parallel EG$. Verschwinden bei dem obern n-Ecke der Fig. 62 m Seiten, so ist der Körper begrenzt von m-Dreiecken und $n - m$ Trapezen außer den Grundflächen; verschwinden außerdem bei dem untern n-Ecke p Seiten, unter welchen sich keine irgend einer der verschwundenen m Seiten entsprechende parallele Seite befindet, so ist der Obelisk seitwärts begrenzt von $m + p$ Dreiecken und von $n - (m + p)$ Trapezen. Wenn endlich an beiden parallelen Grundflächen von je zwei entsprechenden parallelen Seiten abwechselnd eine verschwindet, so hat der Obelisk nur Dreiecke zu Seitenflächen. Hat jede der Grundflächen a-Seiten, so sind der Seitendreiecke $2a$. Fig. 64 z. B. hat zu Grundflächen zwei Dreiecke ABC und DEF und 6 Seitenflächen AFC, DCF u. s. w. Die Grundfläche des Obelisken kann sogar in eine Linie oder in einen Punkt

Fig. 62.

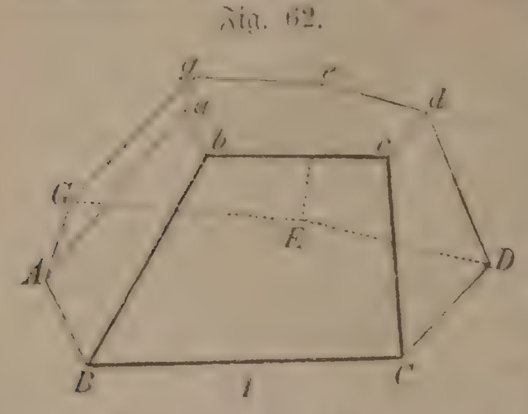


Fig. 63.

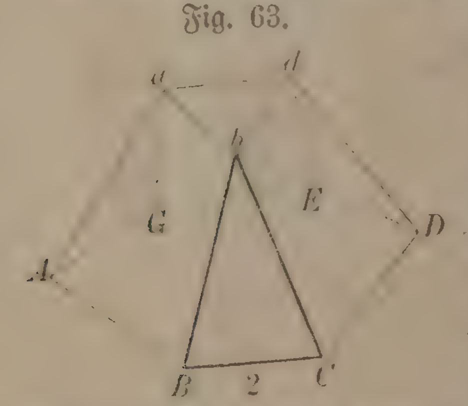
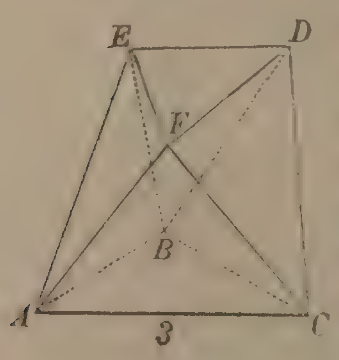




Fig. 64.



übergeben. Der n-seitige Obelisk faßt in sich sowohl das n-seitige Prisma, als auch die abgestumpfte Pyramide und geht durch Verschwinden einer Grundfläche in die n-seitige Pyramide über.

6. Satz. Die Anzahl der Winkel (W), welche von den Kanten auf der Oberfläche eines Polyeders gebildet werden, ist doppelt so groß, als die Zahl jener Kanten (K); $W = 2\ K$.

Beweis. Jede Kante gehört zu zwei Seitenflächen; es ist also die Zahl der Kanten halb so groß, wie die gesammte Zahl aller Seitenlinien jener Flächen, und da jede Fläche so viele Winkel als Seiten hat, auch halb so groß, als die Anzahl der Winkel.

Zusatz 1. Die Anzahl der Winkel W ist immer eine gerade.

Zusatz 2. Wird ein Polyeder durch m Seitenflächen von gerader und von n Seitenflächen von ungerader Seitenzahl begrenzt, so ist n eine gerade Zahl. Dasselbe gilt, wenn man statt Seitenflächen Ecken sagt und statt Seitenzahl Kantenzahl.

7. Satz. In jedem Polyeder, dessen Kanten alle einen ununterbrochenen Zusammenhang haben, ist die Anzahl der Seitenflächen (F) und Ecken (E) zusammen um 2 größer als die Anzahl der Kanten (K). — Euler'scher Satz*).

$$F + E = K + 2.$$

Beweis. Man denke sich ein Netz aneinander hängender ebener Figuren, a, b, c, d, e, f und g, welche in einer Ebene liegen können oder nicht, und bezeichne die Anzahl aller dieser Figuren durch F, die Anzahl ihrer sämmtlichen Eckpunkte durch E, die Anzahl aller geraden Linien, die in diesem Netze vorkommen, durch K. Kommt nun zu diesem Netze irgend eine neue Figur h hinzu, welche mit ihm n Seiten nicht gemein hat, und bezeichnen F', E' und K' in Bezug auf dieses neue Netz das, was F, E und K in Bezug auf das erste Netz bedeuten, so erhellt augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

Fig. 65.



*) Euler: Elementa doctrinae solidorum. Nov. Comm. Petrop. T. IV. pag. 109. Der nachfolgende Beweis ist nach Cauchy.

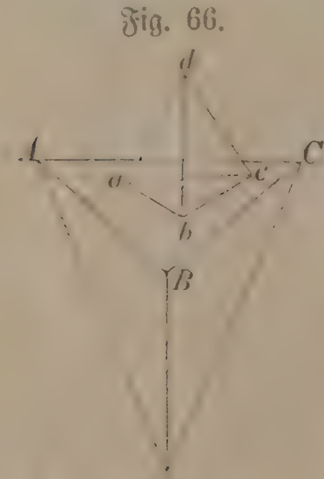
$$F' = F + 1,$$
$$E' = E + (n - 1),$$
$$K' = K + n,$$

woraus folgt, $F' + E' - K' = F + E - K$, so daß die Zahl $F + E - K$ für alle Netze eine constante Zahl ist. Für ein aus einer einzigen Figur bestehendes Netz ist aber $E = K$ und $F = 1$; also ist für alle Netze $F + E - K = 1$ oder $F + E = K + 1$, d. h. die Zahl der Figuren und Ecken des Netzes zusammen genommen ist um 1 größer als die Anzahl der im Netze vorkommenden geraden Linien.

Hat man nun ein völlig umschlossenes Polyeder mit F Seitenflächen, E Ecken und K Kanten, so denke man sich einmal irgend eine Seitenfläche weg, wodurch ein Netz mit $F - 1$ Figuren, E Ecken und K Kanten übrig bleibt, und in welchem also nach dem Vorigen $(F - 1) + E = K + 1$; hieraus folgt aber

$$F + E = K + 2.$$


Fig. 66.



Bemerkung. Der Euler'sche Satz erleidet eine Einschränkung, wenn ein Körper auf einem andern aufsitzt, d. i. keine ganze Seitenfläche mit ihm gemein hat. Setzt man (Fig. 66) den Körper $abcd$ auf $ABCD$, so entsteht ein Körper von 7 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten. $7 + 8 = 12 + 3$ im Widerspruch mit dem Euler'schen Satze. Dasselbe würde Statt finden, wenn ein Körper sich innerhalb eines andern befindet und mit seiner Grundfläche auf der Grundfläche ABC aufsitzt*).

8. Satz. **Die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Polyeders beträgt immer 4mal so viel Rechte als die um 2 verminderte Zahl der Ecken (E) beträgt.**

Beweis. Die Seitenzahlen der einzelnen Seitenflächen seien m, n, p . . .; alsdann sind die Winkelsummen dieser Flächen $2m - 4$, $2n - 4$,

*) Will man die Fläche $ABCcba$ weder als ein Dreieck, noch als ein Sechseck, sondern als ein Achteck betrachten, indem man die Kante cC, welche auf einem flachen Flächenwinkel liegt, mit hinzurechnet, so bildet der obige Körper keine Ausnahme in Bezug auf die Euler'sche Regel. Nur wenn die Polyeder canalförmig durchbrochen sind, finden Ausnahmen Statt, selbst dann, wenn die Flächen normale Polygone sind. (Man vergl. Zeitschrift für Math. und Phys. von Schlömilch. 1863. p. 449.)

$2p - 4 \ldots$ Rechte und die Summe sämmtlicher Winkel ist gleich $2(m + n + p \ldots) - 4F$ Rechte, wenn F die Anzahl der Seitenflächen bezeichnet. Da $m + n + p \ldots = W = 2K$ (6) ist, so ist obige Summe der Winkel gleich $4K - 4F = 4(K - F) = 4(E - 2)$ Rechten (7).

Fortsetzung in Anhang II.

Zweiter Abschnitt.

Sätze über die Eigenschaften der Polyeder in Bezug auf die Seitenflächen und Kanten. Bildung der Netze.

9. **Satz.** **In einem Parallelepipede sind die gegenüberstehenden Seitenflächen congruent, die gegenüberstehenden Körperwinkel symmetrisch.**

Beweis einfach.

Zusatz 1. Man kann je zwei gegenüberstehende Grenzflächen des Parallelepipeds als Grundflächen betrachten.

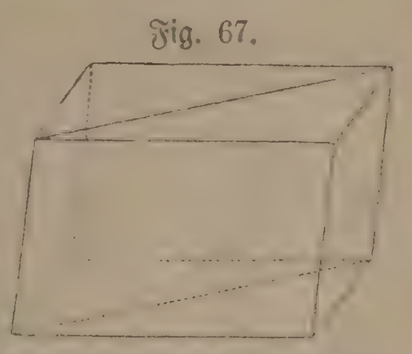


Fig. 67.

Zusatz 2. Ein Parallelepiped ist durch drei an einer Ecke zusammenlaufende Kanten und die drei Winkel, welche sie mit einander bilden, völlig bestimmt.

Zusatz 3. Ein senkrechtes Parallelepiped, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, wird von 6 Rechtecken und ein Würfel von 6 gleichen Quadraten begrenzt.

10. **Satz.** **In jedem Parallelepipede durchschneiden sich die vier Diagonalen in einem und demselben Punkte und werden durch den Durchschnittspunkt halbirt.**

Der Beweis ist mit Hülfe von Planim. II. 36 zu führen.

11. **Satz.** **In einem rechtwinkeligen Parallelepipede sind die Diagonalen einander gleich.**

Beweis auf Planim. II. 37 zu stützen.

12. **Satz.** **Im rechtwinkeligen Parallelepipede ist die Summe der Quadrate dreier anliegenden Seitenkanten dem Quadrate einer Diagonale gleich.**

Der Beweis mit Hülfe des Pythagorischen Lehrsatzes zu führen.

13. **Satz.** **Ist die Grundfläche einer Pyramide ein Kreisvieleck und trifft das Höhenperpendikel den Mittelpunkt dieses Kreises, so sind alle Seitenkanten der Pyramide einander gleich.**

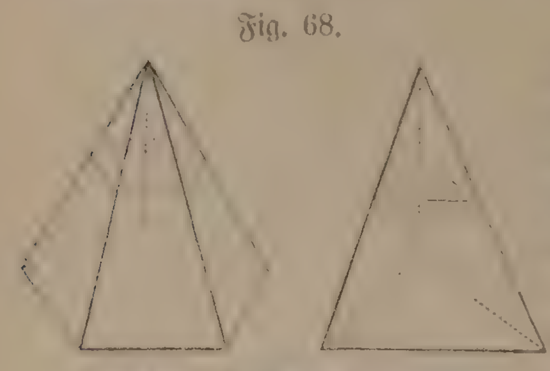
Beweis auf I. 21 zu stützen.

Zusatz. Umgekehrt: Sind alle Seitenkanten einer Pyramide einander gleich, so ist die Grundfläche ein Kreisvieleck.

14. Satz. In einer regulären Pyramide haben alle Seitenflächen sowohl gegen einander gleiche Neigung, als auch gegen die Grundfläche.

Beweis einfach.

Fig. 68.

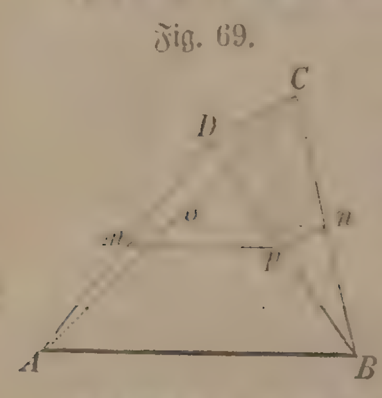


15. Satz. Haben zwei Pyramiden gleiche Höhe, so verhalten sich die parallel und in gleichen Abständen von der Grundfläche geführten Schnitte zu einander wie die Grundflächen selbst.

Der Beweis ergibt sich mit Hülfe des Satzes I. 80.

Zusatz. Sind die Grundflächen gleich, so sind auch die Schnitte gleich.

Fig. 69.



16. Satz. Halbirt man in einem Tetraeder $ABCD$ zwei Paar gegenüber stehende Kanten AD, BC und DB, AC in den Punkten m, n, p und o, so ist $mpno$ ein Parallelogramm, dessen Ebene dem dritten Paare gegenüber stehender Kanten AB, CD parallel ist. (Fig. 69.)

Beweis einfach.

Zusatz 1. Die Geraden, welche die Mitten der gegenüber stehenden Kanten eines Tetraeders mit einander verbinden, durchschneiden sich in einem Punkte.

Zusatz 2. Sind zwei gegenüber stehende Kanten eines Tetraeders einander gleich, so stehen die Verbindungslinien der Mitten je zweier gegenüber stehenden Kanten auf einander senkrecht.

Die Beweise stützen sich auf Planim. II. 36 und 39.

17. Satz. Durchschneidet man die vier Seitenflächen eines Tetraeders mit einer Ebene, parallel zweien gegenüber stehenden Kanten, so ist der Durchschnitt ein Parallelogramm.

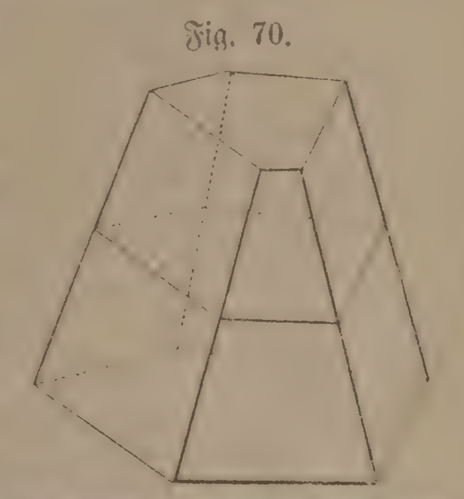
18. Satz. Ist die eine Grundfläche eines Obelisken ein m-Eck, die andere ein n-Eck, und sind p Seiten des ersten eben so vielen Seiten des andern paarweise parallel, so ist der Durchschnitt der Seitenflächen durch eine mit der Grundfläche parallele Ebene ein $m + n - p$-Eck,

welches mit beiden Grundflächen p Seiten und außerdem mit dem m-Ecke $m - p$ und mit dem n-Ecke $n - p$ Seiten bezüglich parallel hat.

Beweis. Die p einzelnen Seiten der einen Grundfläche bilden mit den entsprechenden parallelen Seiten der andern Grundfläche und den ihre Endpunkte verbindenden Seitenkanten p Trapeze. Die $m - p$ übrig bleibenden Seiten der einen m-seitigen Grundfläche und die $n - p$ übrig bleibenden Seiten der n-seitigen Grundfläche sind als Grundlinien eben so vieler dreieckiger Begrenzungsflächen zu betrachten. Die Zahl sämmtlicher Seitenflächen ist somit $p + (m - p) + (n - p) = m + n - p$. Die Behauptung des obigen Satzes ergibt sich hiernach leicht.

19. Erklärung. Schneidet man einen Obelisken durch eine seinen Grundflächen parallele Ebene in gleichen Abständen von diesen, so wird die entstehende Durchschnittsfigur der mittlere Durchschnitt des Obelisken genannt.

Fig. 70.



20. Satz. **Der mittlere Durchschnitt eines Obelisken, der zwei n-seitige Grundflächen hat, und außerdem von n Trapezen begrenzt wird, ist ein n-Eck, dessen Winkel den Winkeln der beiden Grundflächen bezüglich gleich, und dessen Seiten die halben Summen (arithmetischen Mittel) der Seiten der Grundflächen sind.**

Der Beweis leicht mit Hülfe von I. 39, I. 8 und Planim. II. 48, Zus. 1 zu führen.

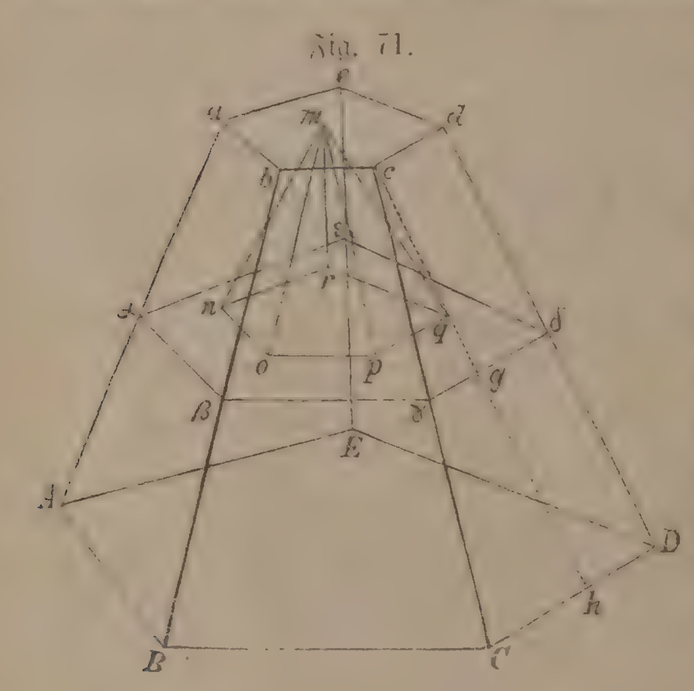
Zusatz. Will man den Satz auf Obelisken ausdehnen, deren Seiten zum Theile oder alle Dreiecke sind, so muß man ihn entweder für die besonderen Fälle, die sich darbieten können, in seinem Ausdrucke modificiren, oder was gerathener ist, man muß sich die Dreiecke als Trapeze vorstellen, d. h. ihre Spitzen durch gerade Linien ersetzen, welche parallel den Grundlinien sind.

21. Erklärung. Zieht man durch einen beliebigen Punkt in der Ebene einer der beiden Grundflächen eines Obelisken Parallelen mit den Seitenkanten bis zur Ebene des mittleren Durchschnittes und verbindet die Endpunkte dieser Parallelen in der Ordnung der auf einander folgenden Kanten, so heißt das dadurch entstandene Vieleck die Ergänzungsfigur des Obelisken.

Durch den Punkt m der Grundfläche ace des Obelisken $ACEace$ (s. Fig. 71 zum folgenden Satze) seien mit den Seitenkanten aA, bB u. s. w. die Parallelen mn, mo, mp u. s. w. gezogen, welche die Ebene des mittleren Durchschnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ in den Punkten n, o, p, q, r treffen mögen. Die Figur $nopqr$ wird alsdann die Ergänzungsfigur des Obelisken sein.

22. Satz. Die Ergänzungsfigur eines Obelisken von n seitiger Grundfläche und begrenzt von n Trapezen, ist ein n-Eck, dessen Winkel den Winkeln der beiden Grundflächen gleich, und dessen Seiten den halben Unterschieden der entsprechenden Seiten jener Vielecke gleich sind. (Fig. 71.)

Fig. 71.



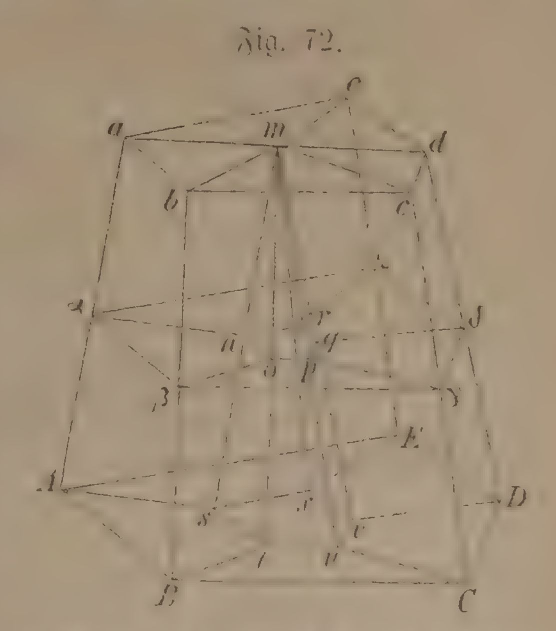
Beweis. Man ziehe durch c mit dD die Parallele ch, welche $\gamma\delta$ in g, CD in h treffen möge. Mit Hülfe von I. 40 und I. 8 läßt sich die Congruenz der Dreiecke mpq und $c\gamma g$ leicht nachweisen; es ist also $pq = \gamma g$. Da ferner $\gamma g = \frac{1}{2} Ch = \frac{1}{2}(CD - cd)$, so ist auch $pq = \frac{1}{2}(CD - cd)$. Ebenso ist $qr = \frac{1}{2}(DE - de)$, $rn = \frac{1}{2}(AE - ae)$ u. s. w.

Aus dem leicht zu erweisenden Parallelismus der Ebenen mpq und $CDdc$ ergibt sich, daß $pq \parallel CD$ u. s. w., und daß $\sphericalangle\, opq = BCD = bcd$, $\sphericalangle\, pqr = CDE = cde$ u. s. w. ist.

23. Satz. **Bei jedem Obelisken ist die halbe Summe der beiden Grundflächen (G und g) gleich der Summe aus der mittleren Durchschnittsfigur (M) und der Ergänzungsfigur (E).**

$$\tfrac{1}{2}(G + g) = M + E.$$

Beweis. Es sei (Fig. 72) $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ der mittlere Durchschnitt und $nopqr$ die Ergänzungsfigur des Obelisken $ACEace$. Man verlängere mn, mo u. s. w. bis zu den Durchschnitten s, t, u, v, x mit der Grundfläche $ACDE$. Zieht



man *st*, *tu*, *vx*, *xs*, so ist $stuvx = 4\ nopqr$ (I. 80). Da die Trapeze *BCut*, *βypo* und das Dreieck *bcm* dieselbe Höhe haben, so verhalten sie sich wie $BC + tu : \beta\gamma + op : bc$. Da aber $\beta\gamma = \frac{1}{2}(BC + bc)$, $op = \frac{1}{2}\ tu$, also $\beta\gamma + op = \frac{1}{2}(BC + bc + tu)$, so ist der Inhalt von *βypq* das Mittel aus dem Inhalte von *BCut* und *bcm*. Dasselbe gilt von den anderen Trapezen in der Durchschnittsfigur; daher ist auch der die Ergänzungsfigur *E* umgebende Ring das Mittel zwischen dem Ringe in der untern Grundfläche und zwischen der obern Grundfläche, d. h. es ist $M - E = \frac{1}{2}(G - 4\ E + g)$, woraus $M + E = \frac{1}{2}(G + g)$.

24. **Aufgabe.** **Gegeben die Grundfläche einer Pyramide, die Höhe nebst Fußpunkt derselben in der Grundfläche, das Netz derselben (d. h. die Oberfläche in zusammenhängender, ebener Figur) zu construiren.**

Auflösung. Die Construction einer Seitenfläche geschieht leicht, wenn man von der Spitze der Pyramide sowohl, als vom Fußpunkte der Höhe auf die Grundkante Senkrechten fällt, welche beide nach I. 26 in einem Punkte derselben zusammentreffen und das rechtwinkelige Dreieck aus jenen beiden Perpendikeln zu construiren sucht.

25. **Aufgabe.** **Gegeben die Grundfläche einer Pyramide und zwei aneinander stoßende Seitenflächen, das Netz der Pyramide zu construiren.**

Leicht durch Construction der Höhe der Pyramide aufzulösen.

Anmerkung. Hieran schließen sich die leichten Aufgaben: die Netze eines Würfels, eines rechtwinkeligen oder schiefwinkeligen Parallelepipedes und überhaupt eines rechtwinkeligen oder schiefwinkeligen Prisma zu finden.

Dritter Abschnitt.

Congruenz, Symmetrie und Aehnlichkeit der Polyeder.

26. Erklärung. Polyeder sind congruent in demselben Falle, wie Figuren überhaupt (s. Planim. Einl. 16). In congruenten Polyedern sind sämmtliche Stücke des einen den entsprechenden Stücken des andern völlig gleich; aber nicht umgekehrt können zwei Polyeder, die in allen ihren Stücken übereinstimmen, jederzeit zur Deckung gebracht werden, wie dieses schon bei den Körperwinkeln und sphärischen Dreiecken vorkam. Ist nämlich die Richtung, in welcher die paarweise gleichen Stücke des Polyeders aufeinander folgen, in beiden Körpern eine entgegengesetzte, so ist die Deckung im Allgemeinen unmöglich; die Polyeder heißen alsdann symmetrisch *). Bei symmetrischen Polyedern entspricht, wie bei congruenten, jedem Punkte, jeder Linie, jedem Winkel 2c. des einen Körpers ein Punkt, eine gleiche Linie, ein gleicher Winkel 2c. des andern. — Um mit Sicherheit zu entscheiden, ob die Richtung eine entgegengesetzte ist, lege man die Körper mit einem Paar entsprechender Seitenflächen in eine Ebene, so daß sie selbst auf einer und derselben Seite dieser Ebene liegen. Die Symmetrie kann übrigens in besonderen Fällen, wenn nämlich unter den Bestimmungsstücken eines Körpers gleiche Stücke vorkommen, in Congruenz übergehen, wovon schon zwei dreikantige Körperwinkel, an denen zwei der drei Seiten-Winkel gleich sind, ein Beispiel liefern.

27. Satz. **Liegen die Ecken zweier Polyeder paarweise auf geraden Linien, die sich in einem Punkte durchkreuzen (Strahlenbündel I. 76) und in paarweise gleichen Abständen von diesem Punkte (Centrum), so sind die Polyeder symmetrisch. Umgekehrt lassen sich zwei symmetrische Polyeder jederzeit in eine solche Lage bringen, daß die (geraden) Verbindungslinien der entsprechenden Ecken sich in einem Punkte kreuzen und in ihm halbiren.**

Der Beweis der ersten Behauptung führt auf die Betrachtung der Pyramiden, welche ihre gemeinschaftliche Spitze im Centrum haben. Je zwei derselben stimmen in der Länge der Seitenkanten, den Winkeln derselben und der Neigung der Seitenflächen gegeneinander überein; hieraus folgt, daß auch ihre Grundflächen in Allem übereinstimmen, u. s. w.

*) Beispiel: Jedes Polyeder ist seinem Bilde im Spiegel im Allgemeinen symmetrisch.

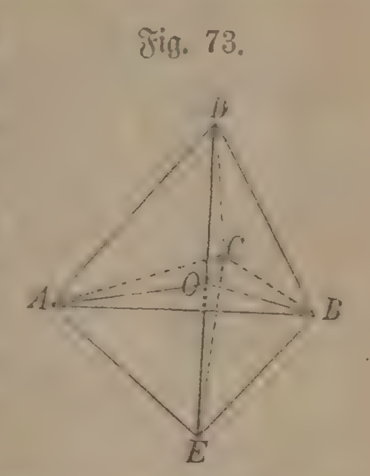
28. **Satz.** Congruente Polyeder lassen sich in eine gleiche Anzahl paarweise congruenter und symmetrische Polyeder in eine gleiche Anzahl paarweise symmetrischer Pyramiden zerlegen; auch sind je zwei Pyramiden, deren Ecken sämmtlich entsprechende Ecken zweier congruenten oder symmetrischen Polyeder sind, selbst congruent oder bezüglich symmetrisch.

Der Beweis hat keine Schwierigkeit.

29. **Satz.** Bringt man zwei symmetrische Polyeder mit einer entsprechenden Seitenfläche so zusammen, daß diese eine gemeinschaftliche Basis wird, sie selbst aber zu verschiedenen Seiten derselben sich befinden, so kommen je zwei entsprechende Eckpunkte beider Körper in eine Senkrechte auf dieser Basis und in gleichem Abstande von dieser zu liegen. Umgekehrt: Sind alle geraden Linien, welche die Ecken eines Polyeders mit denen eines anderen paarweise verbinden, auf einer und derselben Ebene senkrecht und werden sie von dieser halbirt, so sind die Polyeder symmetrisch. (Fig. 73.)

Beweis. Man beweise den Satz zuerst für die Spitzen zweier symmetrischen dreiseitigen Pyramiden $ABCD$ und $ABCE$. Die Verbindungslinie DE der Spitzen D und E treffe die Basis ABC in O. Legt man nun durch AD und AE eine die Basis ABC in AO schneidende Ebene, so stimmen die beiden dreikantigen Körperwinkel $ADOC$ und $AEOC$, welche A zur gemeinschaftlichen Spitze haben, in zwei an AC stoßenden Seiten: $DAC = EAC$, $CAO = CAO$ und dem eingeschlossenen (Flächen-) Winkel überein, sind also nach I. 66 symmetrisch. Mithin sind auch die dritten Winkel, nämlich DAO und EAO einander gleich. Hieraus folgt die Congruenz der Dreiecke DAO und EAO, und somit die Gleichheit der Linien DO und EO. Ferner ergibt sich, daß $\sphericalangle DOA = R$, eben so, daß $\sphericalangle DOB = R$; es steht somit DO auf der Ebene ABC senkrecht. Der Beweis für dreiseitige symmetrische Pyramiden läßt sich auf beliebige Polyeder ausdehnen, wenn man jede nicht in der gemeinschaftlichen Grundebene liegende Ecke als die Spitze einer Pyramide betrachtet, deren Basis die Grundebene ist.

Fig. 73.



Um die Umkehrung zu beweisen, zeige man erstens die Congruenz der Seitenflächen, dann die gleiche Neigung je zweier entsprechenden unter ihnen

gegen die gemeinschaftliche Basis, und ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt mit dieser, drittens die Gleichheit der Neigungswinkel je zweier an einander stoßenden Seitenflächen.

30. Satz. **Stimmen zwei Pyramiden oder Prismen in der Grundfläche und in zwei anstoßenden Seitenflächen überein, so sind sie congruent oder symmetrisch.**

Im Falle der Congruenz ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar aus der Deckung; was die Symmetrie betrifft, so hat man zum Beweise derselben die einzelnen aus der Zerlegung der Körper hervorgehenden dreiseitigen Prismen oder Pyramiden der Ordnung nach durchzugehen.

31. Satz. **Eine durch zwei gegenüberstehende Seitenkanten eines Parallelepipedums geführte Diagonalebene theilt dasselbe in zwei dreiseitige Prismen, die im Allgemeinen symmetrisch, und nur in dem Falle, daß das Parallelepipedum ein senkrechtes ist, congruent sind.**

Beweis einfach.

32. Satz. **Zwei convexe von paarweise congruenten Seitenflächen in derselben Ordnung eingeschlossene Polyeder stimmen auch in der Neigung der gleichen Seitenflächen überein oder haben an den entsprechenden Kanten gleiche Flächenwinkel und sind daher entweder congruent oder symmetrisch.**

Die Beweise dieses und des folgenden 33. Satzes haben wir, ihrer Schwierigkeit wegen, für reifere Schüler in den Anhang III. verwiesen.

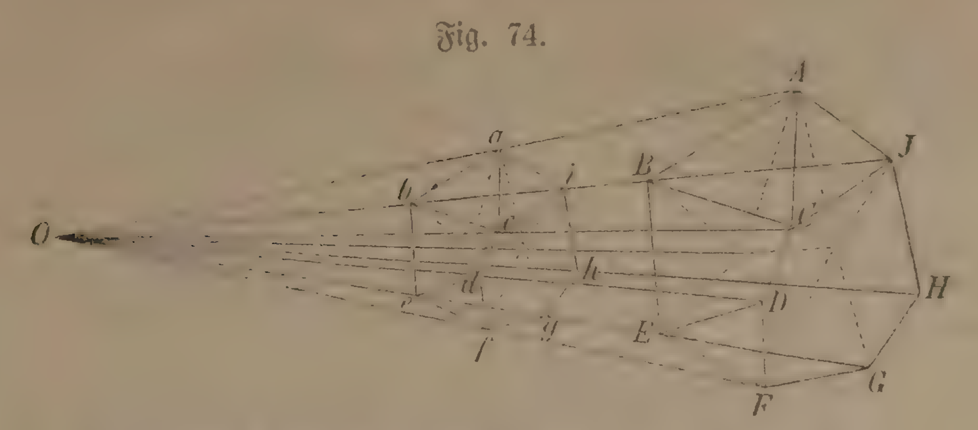
Zusatz. Ein von lauter Dreiecken begrenzter Körper ist durch seine Kanten völlig bestimmt.

33. Satz. **Die Anzahl der zur Bestimmung eines Polyeders nöthigen Stücke ist gerade der Zahl seiner Kanten gleich.**

34. Erklärung. Zwei Körper sind ähnlich in demselben Sinne, wie Figuren überhaupt (Planim. V. 70). Sollen insbesondere zwei Polyeder ähnlich sein, so müssen sie von einer gleichen Anzahl ähnlicher und gleichgeordneter Seitenflächen begrenzt sein und dabei in den Neigungswinkeln der ähnlichen Seitenflächen übereinstimmen. Die Möglichkeit solcher Polyeder erhellt aus folgender Construction:

$ABCD$ .... (Fig. 74) sei ein Polyeder, O ein beliebiger Punkt innerhalb oder außerhalb desselben. Man ziehe von O aus nach allen Eckpunkten des Polyeders gerade Linien: OA, OB, OC 2c., nehme auf einer derselben

Fig. 74.



z. B. auf OA einen beliebigen Punkt a, und ziehe $ab \parallel AB$, $ac \parallel AC$, $ai \parallel AJ$ ꝛc. bis zu den entsprechenden Strahlen OB, OC, OJ, ... so sind a, b, c, .. die Ecken eines dem Polyeder ABC ... ähnlichen Polyeders. Denn die Seitenflächen beider werden durch diese Construction ähnliche Figuren; ferner sind je zwei derselben einander parallel, haben also auch gegen einander gleiche Neigung.

Bemerkung. Auch bei ähnlichen Polyedern kann, wie bei congruenten, Symmetrie eintreten. Nimmt man in der obigen Figur den Punkt a nicht zwischen O und A, sondern auf der über O hinaus gezogenen Verlängerung von AO, so erhält man durch dieselbe Construction ein dem gegebenen Polyeder symmetrisch-ähnliches. Ist überhaupt von zwei Körperfiguren die eine A ähnlich, die andere B symmetrisch zu einer dritten Figur C, so sind A und B symmetrisch-ähnlich zu einander.

35. Satz. **Zwei dreiseitige Pyramiden sind ähnlich, wenn zwei Seitenflächen der einen zweien Seitenflächen der andern ähnlich sind und gleiche Stellung der Winkel haben, auch beide Paare gleich große Flächenwinkel bilden.**

Aus den Voraussetzungen des Satzes und aus I., 66 folgt alsbald die Gleichheit der übrigen Flächenwinkel und die Aehnlichkeit der übrigen Grenzflächen.

Zusatz. Für dreiseitige Pyramiden lassen sich, eben so wie es in der Planim. V., 42—46 für Dreiecke geschehen ist, mehrere Sätze aufstellen, welche die Bedingungen ausdrücken, unter welchen zwei solche Pyramiden ähnlich sind. Der obige spricht unter diesen Sätzen denjenigen aus, der im folgenden Satze als Beweisgrund gebraucht wird. Jener Bedingungen dürfen nicht weniger als fünf sein, wenn man sie auf die Gleichheit derjenigen Elemente zurückführt, von welchen die Gestalt der Körper zuletzt abhängt: Winkel der Kanten, Verhältnisse dieser letzteren, Flächenwinkel. Im Allgemeinen

reichen solche fünf Gleichheiten aus, um die Aehnlichkeit zweier dreiseitigen Pyramiden zu bedingen; in besonderen Fällen kann aber noch die Hinzufügung der einen oder andern Bedingung nöthig werden, wie dieses in Planim. V., 45 der Fall war.

36. Satz. **Sind in zwei Pyramiden die am Scheitel liegenden körperlichen Winkel congruent oder symmetrisch und die Seitenkanten proportionirt, so sind die Pyramiden ähnlich.**

Der Beweis hat keine Schwierigkeit.

Zusatz. Jede mit der Grundfläche einer Pyramide parallel gelegte Ebene schneidet von ihr oder im pyramidalen Raume, den die über die Grundfläche hinaus erweiterten Seitenflächen bilden, eine andere Pyramide ab, welche der ersten ähnlich ist. Wird der Schnitt jenseits des Scheitels durch die über diesen hinaus fortgesetzten Seitenflächen, also im pyramidalen Gegenraume geführt, so entsteht eine der ersten symmetrisch-ähnliche Pyramide.

37. Satz. **Zwei ähnliche Polyeder lassen sich von entsprechenden (homologen) Punkten aus in eine gleiche Anzahl ähnlicher Pyramiden zerlegen.**

Der Beweis ist dem in Planim. V., 73 für ähnliche Vielecke geführten nachzubilden und dabei auf 35 zu gründen.

Vierter Abschnitt.

Die regulären Körper.

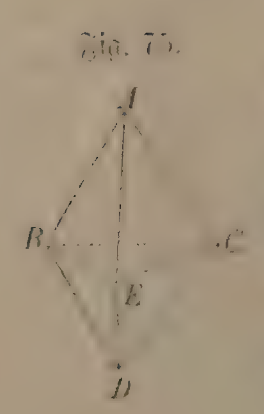


Fig. 75.

38. Erklärung. Reguläre Körper sind convexe Polyeder, deren Seitenflächen alle reguläre Polygone von allerlei Art sind und dabei in gleicher Zahl an jeder Ecke zusammenstoßen. Sämmtliche Kanten eines solchen Körpers sind daher gleich; eben so sind es die sämmtlichen Winkel, welche die Kanten auf der Oberfläche mit einander bilden.

Bemerkung. Die Begrenzung eines Körpers durch reguläre Polygone derselben Art reicht nicht allein hin, die vollkommene Regularität desselben als Körper zu bedingen.

So gibt das Aneinandersetzen zweier von gleichseitigen Dreiecken begrenzten Pyramiden einen von sechs solchen Dreiecken eingeschlossenen Körper (eine Doppelpyramide) $ABCED$ (Fig. 75), der nicht regulär ist, da an den Ecken B, C und E vier, an den Ecken A und D nur drei Kanten oder Grenzflächen zusammenstoßen.

39. Satz. **Es kann nicht mehr als fünf convexe reguläre Körper, überhaupt nur fünf an Zahl der Ecken und Grenzflächen verschiedene convexe Polyeder geben, bei welchen die Grenzflächen gleich viele Seiten und die Ecken gleich viele Kanten haben;**

sie sind:

1. Die dreiseitige Pyramide oder das Tetraeder, von 4 Dreiecken begrenzt, deren 3 an jeder Ecke.
2. Das Hexaeder, ein von 6 Vierecken, deren 3 an jeder Ecke liegen, begrenzter Körper. Ist er regulär, so ist er ein Kubus.
3. Das Octaeder, von 8 Dreiecken begrenzt, deren 4 an jeder Ecke.
4. Das Dodekaeder, von 12 Fünfecken begrenzt, deren 3 eine Ecke bilden.
5. Das Ikosaeder, ein von 20 Dreiecken eingeschlossener Körper, deren 5 an jeder Ecke.

Beweis. In Beziehung auf die regulären Polyeder, deren Kanten an jeder Ecke nur unter gleichen Winkeln zusammenstoßen, läßt sich schon durch den Satz I., 63, nach welchem die Summe der eine convexe Ecke bildenden Winkel stets kleiner als 4 R ist, leicht nachweisen, daß eine solche Ecke nur auf fünf Arten durch Aneinanderschließen von regulären Vielecken gebildet werden kann, nämlich: nur mit 3, 4 oder 5 gleichseitigen Dreiecken, oder mit 3 Quadraten oder mit 3 regulären Pentagonen. Es kann daher auch nicht mehr als 5 reguläre Körper geben.

Was die Anzahl der Seitenflächen, Ecken und Kanten eines jeden derselben und überhaupt eines Polyeders betrifft, dessen Grenzflächen alle gleich viele Seiten haben und dabei in gleicher Zahl an jeder Ecke zusammenstoßen, so geht dieselbe unter anderen aus folgender Betrachtung hervor. Die Anzahl der Grenzflächen eines Polyeders sei F, die seiner Ecken E, die seiner Kanten K; nach dem Euler'schen Satze (III., 7) ist $F + E = K + 2$. Hat nun jede Grenzfläche p Seiten, jede Ecke des Körpers q Kanten, so ist die Anzahl aller Winkel auf der Oberfläche $pF = qE$ oder es ist (III., 6) $2\,K = pF = qE$. Hieraus folgt $pqF = 2qK$ und $pqE = 2pK$, also $pq\,(F + E) = 2\,(p + q)\,K$ und hieraus nach dem Euler'schen Satze:

$$pq\,(K + 2) = 2\,(p + q)\,K, \text{ daher}$$

$$K = \frac{2pq}{2(p+q) - pq}.$$

Damit K eine **positive** Zahl werde, wie es sein muß, kann man p und q nur Werthe beilegen, deren Product kleiner ist als das Doppelte ihrer Summe. Hieraus ergeben sich folgende zusammengehörige p und q:

1) $p = 3$, $q = 3$, woraus $K = 6$, $F = 4$, $E = 4$.
2) $p = 4$, $q = 3$, „ $K = 12$, $F = 6$, $E = 8$.
3) $p = 3$, $q = 4$, „ $K = 12$, $F = 8$, $E = 6$.
4) $p = 5$, $q = 3$, „ $K = 30$, $F = 12$, $E = 20$.
5) $p = 3$, $q = 5$, „ $K = 30$, $F = 20$, $E = 12$.

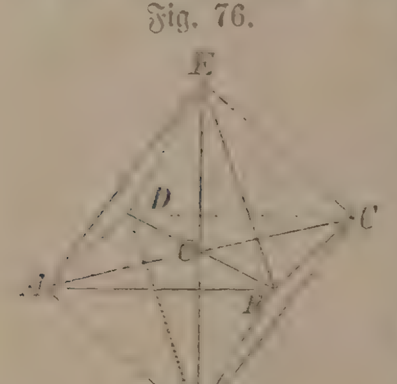
1) entspricht dem Tetraeder, 2) dem Hexaeder, 3) dem Octaeder, 4) dem Dodekaeder, 5) dem Ikosaeder. — Man sehe auch Anhang II., Satz 6.

Von **vier** andern nicht convexen, **sternförmigen**, regulären Polyedern wird in Anhang II., 6 die Rede sein.

40. Satz. In jedem regulären Polyeder sind die von den Grenzebenen an den Kanten gebildeten Flächenwinkel alle unter einander gleich.

Beweis. Für diejenigen regulären Körper, deren Ecken dreikantig sind, also für das Tetraeder, Hexaeder und Dodekaeder, folgt die Richtigkeit des Satzes sogleich aus dem Satze I., 68 für dreikantige Ecken. — Für das Octaeder läßt sich die Gleichheit der Flächenwinkel auf folgende Art direct beweisen. $ABCDEG$ (Fig. 76) sei ein solches, von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Da $\sphericalangle ABE = ABG = CBE = CBG = \frac{2}{3} R$ und $EB = BG$, so steht, wie leicht zu zeigen, die Diagonale EG auf der Ebene des Dreieckes ABC senkrecht; dasselbe gilt, da $\sphericalangle ADE = CDE = GDC = GDA = \frac{2}{3} R$ und $DG = DE$, von EG in Beziehung auf die Ebene des Dreieckes ADC; daher liegen die Dreiecke ABC und ADC in **einer** Ebene, und in dieser ist $ABCD$ ein Rhombus, dessen Diagonalen BD und AC auf einander und auf EG senkrecht stehen. Hieraus und aus der Gleichheit der Kanten des Körpers folgt die Gleichheit der drei Diagonalen. Die Rhomben sind daher Quadrate, mithin die dreikantigen Körperwinkel, welche diese Quadrate oder Diagonalebenen mit den Seitenflächen machen, von gleichen Winkeln ($= 1\ R$ und $\frac{2}{3}\ R$) gebildet, folglich nach I., 68 die Flächenwinkel dieser letzteren einander gleich.

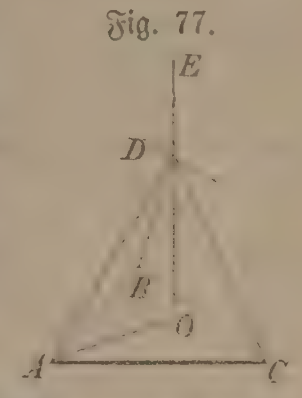
Fig. 76.



Was das Ikosaeder betrifft, so wird es, statt eines besonderen Beweises, genügen, zu bemerken, daß der vorliegende Satz allgemein eine unmittelbare Folge des im vorhergehenden Abschnitt Nr. 32 aufgestellten und im Anhange bewiesenen Satzes ist, daß, wenn zwei convexe Polyeder in den Seitenflächen und ihrer Ordnung übereinstimmen, sie dann auch in den Flächenwinkeln, welche diese bilden, nicht verschieden sind. Um jene Folge zu ziehen, hat man sich nur entweder den Körper doppelt zu denken und so mit sich selbst zu vergleichen, oder, man hat ihn einem Körper mit denselben Seitenflächen gegenüber zu stellen, um aus der Anwendung des eben erwähnten Satzes auf sie die Gleichheit der Flächenwinkel zu erkennen.

41. **Aufgabe. Das reguläre Tetraeder von gegebener Kantenlänge m zu construiren.** (Fig. 77.)

Fig. 77.

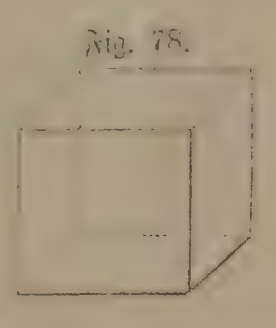


Auflösung. Man beschreibe das gleichseitige Dreieck ABC, dessen Seite $= m$, errichte auf dessen Ebene und in seinem Mittelpunkte O ein Perpendikel OE und beschreibe in einer durch A und OE gelegten Ebene um A als Mittelpunkt und mit m als Radius einen Kreis. Derselbe treffe OE in D; verbindet man nun D mit A, B und C, so ist $ABCD$ das Kantennetz des regulären Tetraeders.

Auf eine andere Art gelangt man zu dem Punkte D, wenn man die Höhe OD des Tetraeders bestimmt. Es ist aber $\overline{OD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AO}^2$, und nach Planim. VI., 10, Zus. 3, $\overline{AC}^2$ oder $\overline{AD}^2 = 3\,\overline{AO}^2$; folglich $\overline{OD}^2 = 3\,\overline{AO}^2 - \overline{AO}^2 = 2\,\overline{AO}^2$. Construirt man also ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreieck, dessen Katheten $= AO$ sind, so ist die Hypotenuse desselben die verlangte Höhe des Tetraeders.

42. **Aufgabe. Den Kubus zu construiren, von gegebener Seitenlänge m.**

Fig. 78.



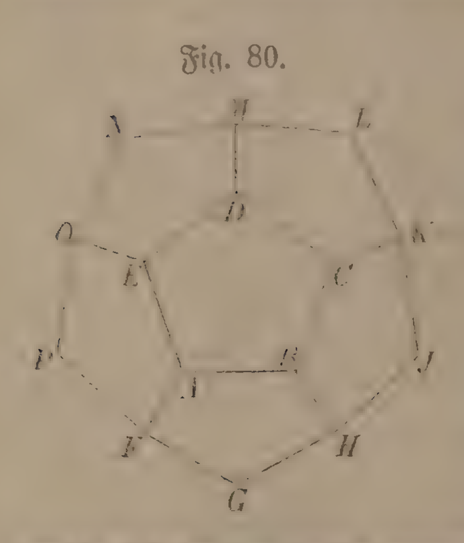
Da dieser Kubus ein senkrechtes Prisma von der Höhe m und seine Grundfläche ein Quadrat von der Seitenlänge m ist, so erhellt die Construction von selbst.

43. **Aufgabe. Das reguläre Octaeder von gegebener Kantenlänge m zu construiren.**


Fig. 79.

Auflösung. Man beschreibe das Quadrat $ABCD$, dessen Seite gleich m, und errichte auf seiner Ebene im Durchschnitte O seiner Diagonalen zu beiden Seiten desselben ein Perpendikel $OE = OG = OA$; AC, BD und EG sind also drei gleich lange, aufeinander senkrecht stehende und in O sich halbirende Linien. Verbindet man nun die Endpunkte E und G der letzteren mit den Endpunkten A, B, C und D der ersten, so entsteht, wie sich leicht zeigen läßt, das Kantennetz $ABCDEG$ des regulären Octaeders.

44. Aufgabe. Das reguläre Dodekaeder zu construiren, dessen Kantenlänge gegeben und gleich m ist. (Fig. 80.)

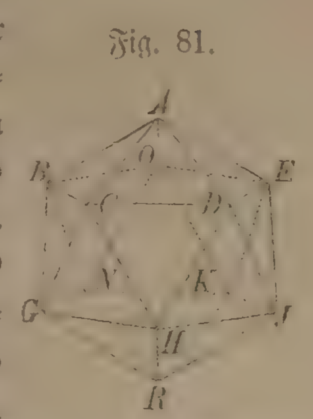

Fig. 80.

Auflösung. Legt man drei reguläre Fünfecke ACD, AEP und ABG, deren Seitenlänge gleich m ist, so aneinander, daß die Winkel BAE, EAF und FAB derselben, welche alle $= \frac{6}{5} R$ sind, eine körperliche Ecke bilden, so ist mit Hülfe von I., 66 leicht nachzuweisen, daß auch die Winkel CBH, DEO und $GFP = \frac{6}{5} R$ oder Winkel regulärer Fünfecke werden. Es lassen sich also an ED und BC wieder zwei solche Fünfecke EDN und BCJ anlegen, welche sich den drei früher genannten Fünfecken anschließen; endlich läßt sich aus demselben Grunde ein sechstes Fünfeck CDL an CD legen, welches sich den vorigen anschließt. Construirt man nun mit sechs andern regulären Fünfecken eine zweite der vorigen ganz gleiche convexe Fläche, so folgt daraus, da die Winkel GFP, PON, NML ... alle $= \frac{6}{5} R$ sind, daß diese zweite Fläche so an die erste anschließend gelegt werden kann, daß dadurch ein Körper entsteht, der durch $2 \cdot 6 = 12$ reguläre Fünfecke begrenzt ist.

45. Aufgabe. Das reguläre Ikosaeder von gegebener Kantenlänge m zu construiren.

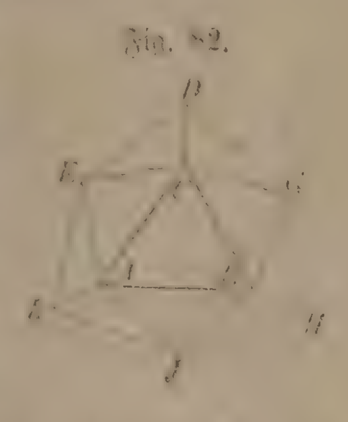
1. Construction. Man bilde (Fig. 81) in ähnlicher Weise, wie bei Aufg. 41 (Fig. 77) geschehen, die fünfseitige Pyramide $ABCDEO$, deren Basis $BCDEO$ ein reguläres Fünfeck von der Seitenlänge m ist, und dessen Seitenflächen die gleichseitigen Dreiecke ABC, ACD, ... bilden. Zieht man BD, so ist $\triangle ABD \cong CBD$, mithin $\sphericalangle BAD = BCD = \frac{6}{5} R$. Dasselbe gilt von den Winkeln, CAE, DAO, EAB und OAC, von denen jeder $= \frac{6}{5} R$. Man vollende nun die regulären Fünfecke $BADHG$, $CAEJH$, $DAOKJ$, $EABNK$, und $OACGN$, so erhält man 10 unter sich und der Grundfläche der Pyramide sich anschließende gleichseitige Dreiecke: CDH, DHJ, DJE, EJK 2c. Die so aus 15 aneinander stoßenden Dreiecken gebildete convexe Fläche läßt sich endlich durch eine von weiteren fünf gleichseitigen Dreiecken umschlossene körperliche Ecke $RGHJKN$, deren Spitze R ist, zu einer überall zusammenhängenden Fläche schließen, welche die Oberfläche des verlangten regulären Ikosaeders bildet.

Fig. 81.



2. Construction. An jeder Ecke des gleichseitigen Dreiecks ABC, dessen Seite $= m$ ist, (Fig. 82) bilde man mittelst Anschließung von neuen gleichseitigen Dreiecken eine reguläre fünfflächige Ecke, so daß ABC eine gemeinschaftliche Seitenebene dieser drei Ecken wird. Denkt man sich nun die gebildete, aus 10 aneinander stoßenden gleichseitigen Dreiecken bestehende, convexe Oberfläche noch einmal construirt, so läßt sich die zweite mit der ersten, wie leicht nachzuweisen ist, so zusammenstellen, daß dadurch ein von allen Seiten geschlossener, von 20 regulären Dreiecken begrenzter, Körper entsteht.

Fig. 82.



Ueber die Projicirung des regulären Dodekaeders und Ikosaeders und die Construction dieser Körper mittelst ihrer Projectionen siehe Anhang I. 1–

46. Satz. **In jedem regulären Polyeder gibt es einen Punkt, der a) von allen Seitenflächen, b) von allen Kanten, c) von allen Ecken gleichweit absteht.**

Es gibt demnach a) eine Kugel, welche sämmtliche Seitenflächen berührt, b) eine Kugel, welche sämmtliche Kanten berührt, und c) eine Kugel, welche durch sämmtliche Ecken geht.

Beweis. Errichtet man auf zwei benachbarten Seitenebenen in der Mitte einer jeden senkrechte Linien, so ist leicht nachzuweisen, daß dieselben sich in einem Punkte schneiden, der von den Mitten jener Ebenen gleichweit absteht. Errichtet man nun noch auf einer dritten anstoßenden Seitenebene in der Mitte eine Senkrechte, so läßt sich ferner durch Deckung zeigen, daß auch diese dritte Senkrechte mit den beiden ersten in demselben Punkte zusammentreffe, und dieser Punkt auch von der dritten Seitenebene ebensoweit entfernt sei, wie von den beiden ersten. Durch Fortsetzung dieser Schlüsse folgt, daß dieser Punkt von sämmtlichen Seitenebenen gleichweit absteht. Durch Congruenz der Dreiecke läßt sich ferner nachweisen, daß derselbe Punkt, welcher von den Seitenebenen gleichweit absteht, sowohl von allen Seitenkanten, als auch von allen Ecken gleichweit entfernt ist. Hieraus ergibt sich die über die drei Kugeln aufgestellte Behauptung von selbst.

Zusatz. Läßt sich eine Kugel beschreiben, welche die Seitenebenen eines Körpers berührt, und eine zweite concentrische, welche durch die Ecken geht, so braucht der Körper deßhalb noch kein regulärer zu sein. Denn wenn man einem Körper eine Kugel umschreiben und eine concentrische einschreiben kann, so folgt daraus nur: 1) daß die Grenzebenen Kreisfiguren sind, d. h. solche, welchen sich Kreise umschreiben lassen, und 2) daß die Halbmesser dieser Kreise einander gleich sind.

47. Satz. Die Mittelpunkte der verschiedenen Seitenflächen eines regulären Polyeders sind gegenseitig die Spitzen eines andern regulären Körpers, nämlich:

Die Seitenmitten des Tetraeders sind die Spitzen eines Tetraeders,
" " " Hexaeders " " " Octaeders,
" " " Octaeders " " " Hexaeders,
" " " Dodekaeders " " " Ikosaeders,
" " " Ikosaeders " " " Dodekaeders.

Beweise leicht.

48. Satz. Die Spitzen eines regulären Hexaeders oder Dodekaeders sind zugleich die Spitzen von zwei oder fünf regulären Tetraedern.

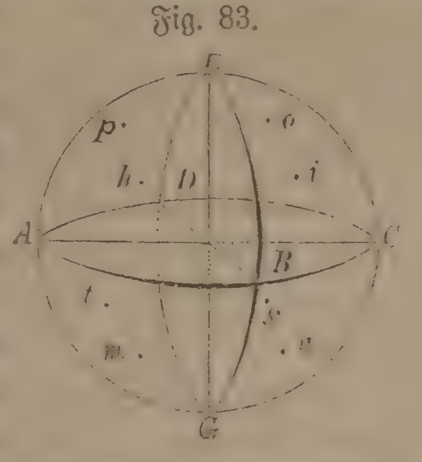
Beweise einfach.

49. Aufgabe. Auf einer gegebenen Kugelfläche die Eckpunkte der fünf darin einzuschreibenden regulären Polyeder zu bestimmen.

Auflösung. Denkt man sich einem beliebigen der fünf regulären Körper eine Kugel umgeschrieben und die Ecken des Körpers durch Bogen größter Kreise in derselben Weise verbunden, wie sie es durch die Kanten

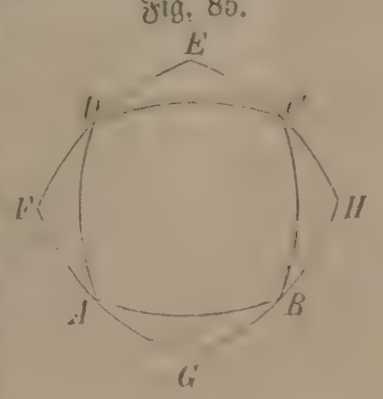
sind, so theilen diese Bogen die ganze Oberfläche der Kugel in so viele reguläre sphärische Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke, als der Körper Seitenflächen hat. Jedem solchen sphärischen Drei-, Vier- oder Fünfecke entspricht ein von den Kanten des Körpers gebildetes Sehnen-, Drei-, Vier- oder Fünfeck, welches mit ihm dieselben Ecken hat. Hierauf gründen sich folgende Auseinandersetzungen:

Fig. 83.



Am einfachsten lassen sich auf der Kugelfläche die Ecken eines Octaeders bestimmen. Die Durchschnitte *A*, *B*, *C*, *D*, *E* und *G* dreier auf einander senkrecht stehenden größten Kreise *AECG*, *DEBG* und *ABCD* sind die Ecken des Octaeders. Die sphärischen Mitten *h*, *i*, *m*, *n*, *o*, *p*, *s*, *t* der Dreiecke *ABE*, *EBC*, u. s. w. sind die Eckpunkte eines der Kugel eingeschriebenen Würfels, und endlich sind die vier Punkte *s*, *m*, *i*, *p* für sich, so wie die vier Punkte *h*, *o*, *n*, *t* für sich die Eckpunkte eines der Kugel eingeschriebenen Tetraeders. Unabhängig vom Octaeder erhält man auch die Tetraeder und Hexaeder-Ecken durch die folgende Betrachtung.

Fig. 84.



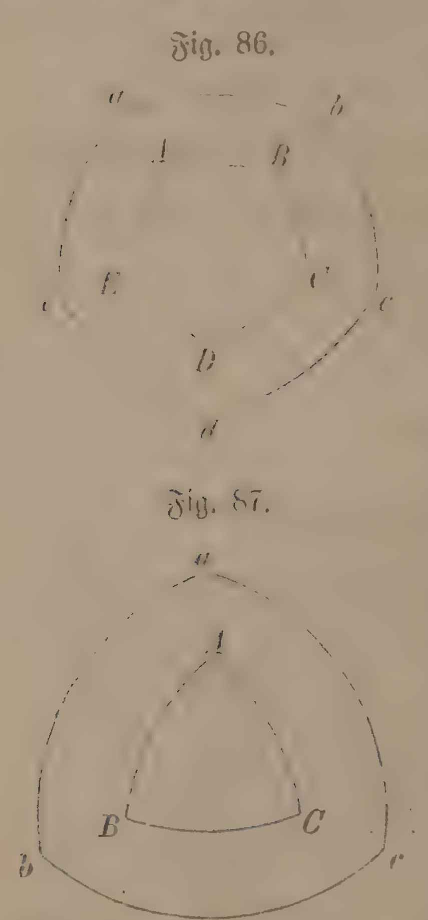
Von dem einer Tetraederfläche angehörigen sphärischen Dreiecke kennt man die drei Winkel. Jeder derselben beträgt, da 3 um einen Punkt herum liegen und gleich sind, $\frac{4}{3}$ *R*. Jede Seite des mit diesem reciproken Dreieckes beträgt also $\frac{2}{3}$ eines Quadranten (II., 29).

Man beschreibe also (Fig. 84) auf der Kugelfläche zunächst ein gleichseitiges Dreieck *ABC*, so daß die geradlinigen Entfernungen *AB*, *BC* und *CA* dem Radius der Kugel gleich werden. Das dem Dreiecke *ABC* entsprechende reciproke Dreieck *abc* wird alsdann, wie sich einfach nachweisen läßt, drei Eckpunkte des Tetraeders liefern, wozu sich auch der vierte leicht bestimmen läßt.

Fig. 85.

Zur Construction des Hexaeders denke man sich zu dem einer Seitenfläche desselben entsprechenden sphärischen Vierecke das reciproke Viereck construirt und suche dessen Seiten zu bestimmen. In Folge dieser Bestimmung mache man ein Quadrat (Fig. 85), dessen Seite dem Radius

der Kugel gleich ist, und lege dasselbe so, daß es mit seinen Ecken *A*, *B*, *C* und *D* die Kugelfläche berührt; bilde ferner durch Verbindung dieser Ecken ein sphärisches Viereck und construire zu demselben das reciproke Viereck *EFGH*; dann sind *E*, *F*, *G* und *H* vier zum Hexaeder gehörige Eckpunkte*).



Ist ferner *ABCDE* (Fig. 86) das zur Seitenfläche des Dodekaeders gehörige sphärische Fünfeck, *abcde* dessen reciprokes Fünfeck, so ist jeder der Winkel *A*, *B* rc. $= \frac{4}{3} R$, also jede der Seiten *ab*, *bc* rc. des reciproken Fünfeckes $= \frac{2}{3}$ des Quadranten, jede der Sehnen *ab*, *bc* rc. ist somit dem Radius der Kugel gleich. Construirt man also in einer Ebene das reguläre Fünfeck über dem Radius der Kugel als Seite (Plan. VI., 15), trägt dasselbe mit den Ecken in die Kugelfläche, construirt zu demselben das entsprechende sphärische Fünfeck *abcde* und zu letzterem die reciproke Figur *ABCDE*, so sind die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *E* fünf dem Dodekaeder zugehörige Ecken; die übrigen ergeben sich leicht durch jene.

Zur Construction des Ikosaeders endlich suche man ebenso aus dem sphärischen Dreiecke *ABC* (Fig. 87), welches einer Seitenfläche des Ikosaeders entspricht, das reciproke Dreieck *abc* zu bestimmen. Da jeder der Winkel *A*, *B* und $C = \frac{4}{3} R$ ist, so ist jede der Seiten *bc*, *ca* und $ab = \frac{3}{5}$ eines Quadranten. Theilt man daher den Umfang eines größten Kreises in 10 gleiche Theile und nimmt 3 derselben, so erhält man einen der Seite *bc* gleichen Bogen, hieraus das Dreieck *abc* und endlich das reciproke Dreieck *ABC*. Das Ikosaeder läßt sich aber auch aus dem Dodekaeder und umgekehrt das Dodekaeder aus dem Ikosaeder darstellen.

---

*) Die Eckpunkte *A*, *B*, *C* und *D* Fig. 85 des Vierecks *ABCD* liegen auf den Seiten des reciproken Vierecks. Warum?

IV. Capitel.

Die Schnitte der Cylinder- und Kegelfläche; Größe des Cylinder- und Kegelmantels, der Oberfläche von Kugel und Ring.

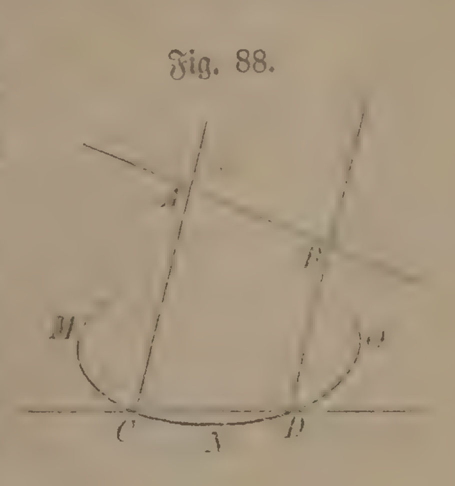
Erster Abschnitt.

Schnitte der Cylinder- und Kegelfläche.

1. Erklärung. Unter Cylinderfläche oder cylindrischer Fläche versteht man im allgemeinsten Sinne jede Fläche, die von einer begrenzten oder unbegrenzten geraden Linie beschrieben wird, wenn diese sich längs einer gegebenen krummen Linie (Richtungscurve, Directrix) im Raume so fortbewegt, daß sie dabei stets sich selbst in ihrer anfänglichen und daher auch spätern Lage parallel bleibt. Die beschreibende gerade Linie wird dabei in jeder besondern Lage oder Stelle, die sie durch die Fortbewegung erhält, eine Seitenlinie der Cylinderfläche genannt. Die Seitenlinien sind daher alle untereinander parallel. Auch ist der Durchschnitt der cylindrischen Fläche mit jeder Ebene, welche durch eine Seitenlinie oder durch eine den Seitenlinien parallele Gerade gelegt wird, selbst eine der Seitenlinien.

2. Satz. Die Cylinderfläche ist eine gekrümmte Fläche, so jedoch, daß in der Richtung der Seitenlinie keine Krümmung Statt findet. (Fig. 88.)

Fig. 88.

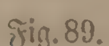


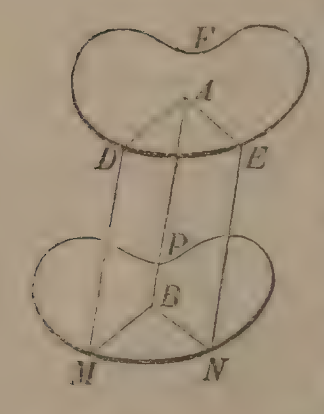
Der Beweis hat zu zeigen, daß eine gerade Linie, welche irgend zwei nicht in einer Seitenlinie liegende Punkte A und B der Cylinderfläche verbindet, mit allen übrigen Punkten außerhalb dieser Fläche

liegt. Man ziehe deßhalb durch die Punkte A und B zwei Seitenlinien AC und BD bis zur Curve MNO, längs welcher die beschreibende Linie der Cylinderfläche sich fortbewegt hat und verbinde die Punkte C und D. Daraus, daß die gerade Linie oder Sehne CD keinen Punkt mit dem Bogen CND gemein hat und $AC \parallel BD$ ist, läßt sich, mit Hülfe zu ziehender Parallelen, nachweisen, daß auch die Gerade AB keinen Punkt mit der Cylinderfläche gemein hat.

3. **Satz. Die Cylinderfläche ist eine Fläche, die sich zur Ebene ausstrecken oder entrollen läßt (surface développable).**

Denkt man sich durch jede von mehreren Seitenlinien der Cylinderfläche a) eine Ebene gelegt, welche diese und die folgende Seitenlinie in sich enthält, b) eine Ebene, welche die Fläche berührt, so entstehen zwei prismatische Räume, von welchen der eine der Cylinderfläche eingeschrieben, der andere ihr umgeschrieben ist. Die Seitenfläche eines jeden dieser prismatischen Räume läßt sich in eine Ebene ausbreiten, indem man sich vorstellen kann, jede der Ebenen, woraus sie besteht, drehe sich um eine der sie begrenzenden Kanten so lange, bis sie in die Erweiterung der benachbarten Ebene fällt und dann mit dieser nur eine Ebene ausmacht. Da nun die Cylinderfläche zwischen den Seitenflächen der prismatischen Räume liegt und die Grenze bildet, welcher jene Seitenflächen sich durch Vermehrung der Anzahl von Ebenen, aus denen sie bestehen, beliebig nähern können, so wird dasselbe von der Cylinderfläche gelten.


Fig. 89.



4. **Satz. Die Durchschnitte der Cylinderfläche mit zweien unter sich parallelen Ebenen sind jederzeit congruente Figuren.** (Fig. 89.)

Beweis. Diese Durchschnittsfiguren seien DEF und MNP, AB aber irgend eine den Seitenlinien parallele Gerade, welche die Ebenen jener in A und B trifft. Zieht man nun in einer dieser Ebenen z. B. in DEF von A aus zwei beliebige Gerade AD und AE bis zum Umfang der Figur und legt durch jede derselben und durch AB eine Ebene, deren Durchschnitte mit der andern Figur und der Cylinderfläche für die eine BM und DM, für die andere BN und EN seien, so ergibt sich gleich, daß $ADMB$ und $AENB$ Parallelogramme sind, daß also $AD = BM$, $AE = BN$ sei. Auch

ist $\measuredangle DAE = MBN$. Hieraus folgt die Möglichkeit, beide Figuren zur Deckung zu bringen, d. h. ihre Congruenz. Vergl. I., 77.

5. Erklärungen. Unter Cylinder im allgemeinen Sinne des Wortes versteht man einen Körper, der von irgend einer Cylinderfläche und zweien parallelen Ebenen ringsum begrenzt wird. Diese Ebenen, so weit sie den Cylinder begrenzen, sind seine Grundflächen, und diese sind nach (4) stets congruente Figuren; derjenige Theil der Cylinderfläche aber, welcher zwischen den beiden Grundflächen liegt, wird der Mantel des Cylinders genannt. Der Mantel ist also der allein gekrümmte Theil der Oberfläche.

Stehen die Seitenlinien des Cylinders senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Cylinder ein senkrechter, sonst ein schiefer.

Höhe eines Cylinders ist der senkrechte Abstand seiner beiden Grundflächen von einander. Sie ist beim senkrechten Cylinder den Seitenlinien gleich, beim schiefen kleiner als diese.

6. Erklärungen. Im engeren Sinne und namentlich auf dem Gebiete der Elementar-Geometrie versteht man unter Cylinder insgemein nur den Kreiscylinder, d. h. denjenigen, dessen Grundfläche ein Kreis ist. Der Mantel desselben wird nun von einer geraden Linie beschrieben, die sich selbst parallel bleibend, fortrückt, während ihr Ende den Umfang eines Kreises durchläuft, kann aber auch von diesem Umfange beschrieben werden, indem man den Mittelpunkt desselben eine gerade Linie durchlaufen läßt, während die Ebene desselben sich selbst oder der anfänglichen Lage parallel bleibt.

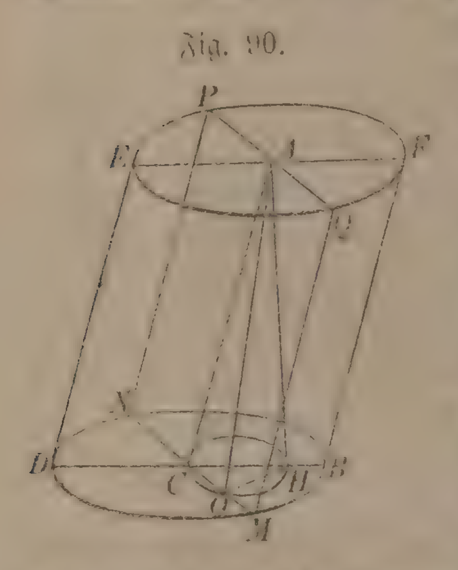
Die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, ist die Achse des Cylinders. Sie ist den Seitenlinien auf dem Mantel nothwendig parallel und enthält die Mittelpunkte aller den Grundflächen parallelen Durchschnitte. Diese sind nach (4) Kreise von gleichem Radius mit den Grundflächen.

Der Kreiscylinder ist gleichfalls senkrecht oder schief, je nachdem die Achse senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht. Die Höhe des senkrechten ist der Achse gleich, die des schiefen kleiner als die Achse. — Wird ein Rechteck um eine seiner Seiten einmal vollständig umgedreht, so erzeugt dasselbe einen senkrechten Cylinder; die an die Achse stoßenden Seiten beschreiben die kreisförmigen Grundflächen, die gegenüber liegende Seite beschreibt den Mantel.

7. Satz. **Der Durchschnitt des Cylinders mit irgend einer durch die Achse oder parallel mit der Achse geführten Ebene (im ersten Falle kurz: Achsenschnitt genannt) ist ein Parallelogramm. Im senkrechten Cylinder sind diese Parallelogramme sämmtlich Rechtecke und, wenn es Achsenschnitte sind, congruent. Im schiefen Cylinder ist der größte Achsenschnitt auch ein Rechteck; die übrigen sind schiefwinkelig und um so kleiner, je größer ihr Neigungswinkel mit der Grundfläche ist. Der größte hat zu dieser dieselbe Neigung, wie die Achse; der kleinste steht auf dem größten und auf der Grundfläche senkrecht.** (Fig. 90.)

Die erste Behauptung, daß jeder der genannten Schnitte ein Parallelogramm sei, folgt sofort aus I., 39 und den der Definition der Cylinderfläche in (1) beigefügten Bemerkungen über die Seitenlinien. Die zweite den senkrechten Cylinder betreffende ist gleichfalls aus der Erklärung desselben offenbar. — Was die dritte Behauptung über die Achsenschnitte des schiefen Cylinders betrifft, so sei *MNPQ* ein solcher durch die Achse *AC* geführter Schnitt. Fällt man aus dem Mittelpunkte *A* der obern Grundfläche ein Perpendikel *AH* auf die untere, dann aus *H* ein Loth *HO* auf *MN* oder deren Verlängerung und verbindet *O* mit *A*, so ist auch (I., 26) $AO \perp MN$, also *AO* die Höhe des Parallelogramms *MNPQ*. Da die Grundlinie *MN* desselben sich nicht ändert, wenn man die Schnittebene um die Achse dreht, so ist das Parallelogramm *MNPQ* seiner Höhe *AO* proportional.

Fig. 90.



AO wird aber um so kleiner, je größer der Winkel *AOH*, d. i. je größer der Neigungswinkel der Ebene *MNPQ* gegen die Grundfläche des Cylinders ist. Nach I., 51 ist dieser Winkel am größten, wenn *MN* in die Richtung von *CH* fällt; der Achsenschnitt steht dann senkrecht auf der Grundfläche (in der Figur ist er *BDEF*) und hat unter allen den kleinsten Inhalt; dagegen ist jener Winkel am kleinsten und dem der Achse gegen die Grundfläche gleich, wenn $MN \perp BD$ ist. Der Achsenschnitt ist alsdann am größten und bildet, da nun $AC \perp MN$ ist, ein Rechteck.

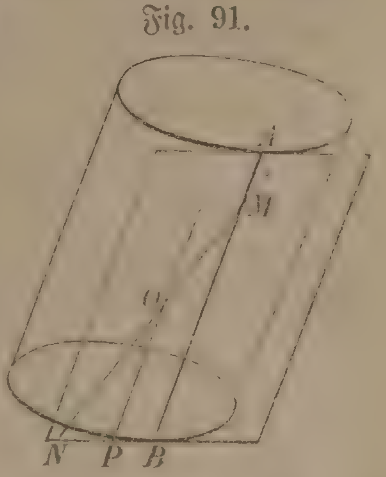
Zusatz. Die Endpunkte *O* der aus *A* auf die Durchmesser der Grundfläche gefällten Perpendikel liegen alle im Umfange eines über *CH* als

Durchmesser beschriebenen Kreises, der also der geometrische Ort jener Endpunkte ist.

8. **Satz.** **Geht durch einen Punkt im Umfange der Basis des Cylinders eine Seitenlinie desselben und eine Tangente zur Basis, so wird 1) jede dritte gerade Linie, welche zwei Punkte jener Linien verbindet, den Cylindermantel in einem Punkte der Seitenlinie, 2) eine durch beide Linien gelegte Ebene denselben Mantel längs der ganzen Seitenlinie berühren.**

Der Beweis hat darzuthun, daß jeder Punkt O (Fig. 91) der genannten Verbindungslinie (in der Figur MN) mit Ausnahme des zur Seitenlinie AB gehörigen Punktes M außerhalb des Cylinders liege. Zu dem Ende ziehe man durch O mit AB eine Parallele bis zur Tangente NB; sie muß diese treffen, geschieht es in P, so liegt P außerhalb des Cylinders, daher auch die ganze Linie PO und somit auch der Punkt O.

Fig. 91.



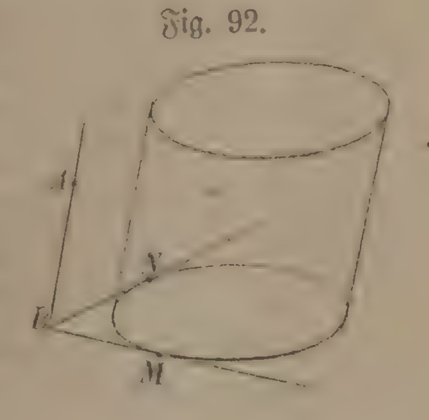
Zusatz. Durch jede Seitenlinie des Cylinders läßt sich nur eine Berührungs-Ebene legen, und alle durch Punkte jener Seitenlinie gehenden Tangenten fallen in diese Ebene. Leicht läßt sich nämlich zeigen, daß eine Ebene, welche AB, aber nicht die Tangente NB in sich enthält, den Cylindermantel in einer zweiten Seitenlinie, so wie daß eine gerade Linie, die M und einen außerhalb der Tangente NB liegenden Punkt verbindet, den Mantel in einem zweiten Punkte treffen muß.

9. **Aufgabe.** **Durch einen außerhalb des Cylinders gegebenen Punkt eine Berührungs-Ebene an denselben zu legen.**

Die Auflösung ist auf den vorigen Satz zu gründen und leicht, wenn man bemerkt, daß eine durch den gegebenen Punkt A mit der Cylinderachse gezogene Parallele AB die verlangte Ebene in sich enthalten muß.

Zusatz. Durch einen gegebenen Punkt A außerhalb des Cylinders lassen sich immer zwei Ebenen legen, die beide den Cylinder berühren. Ihr Durchschnitt ist der Achse parallel.

Fig. 92.



10. Satz. **Jede von der Cylinderfläche begrenzte und die Achse treffende gerade Linie wird von der Achse halbirt.**

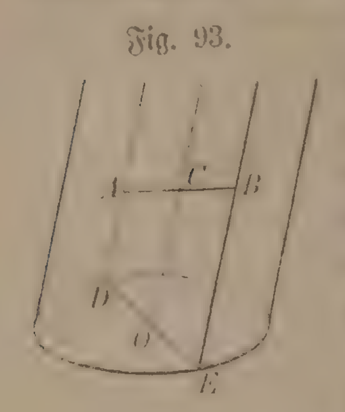


Fig. 93.

Zum Beweise lege man durch die in Rede stehende Linie (in der Figur AB) und die Cylinderachse CO eine Ebene und wende auf das als Durchschnitt dieser Ebene mit der Cylinder- und Grundfläche entstehende Trapez $ABED$ den Satz in Planim. II., 46 an, wodurch man $AC = CB$ erhält.

Zusatz. Jede Figur, die aus dem Durchschnitte der Cylinderfläche und einer Ebene entsteht, hat einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt, der alle durch ihn und bis zum Umfange der Figur gezogenen geraden Linien (Durchmesser derselben) halbirt. Dieser Mittelpunkt liegt in der Achse.

11. Erklärung. Wird ein schiefer Cylinder von einer der Grundfläche nicht parallelen Ebene so geschnitten, daß die Achse dabei gleiche und unter sich in einerlei Ebene liegende Neigungswinkel mit der schneidenden Ebene und der Grundfläche bildet, so wird ein solcher Durchschnitt des Cylinders **Wechselschnitt** (Sectio subcontraria) genannt.

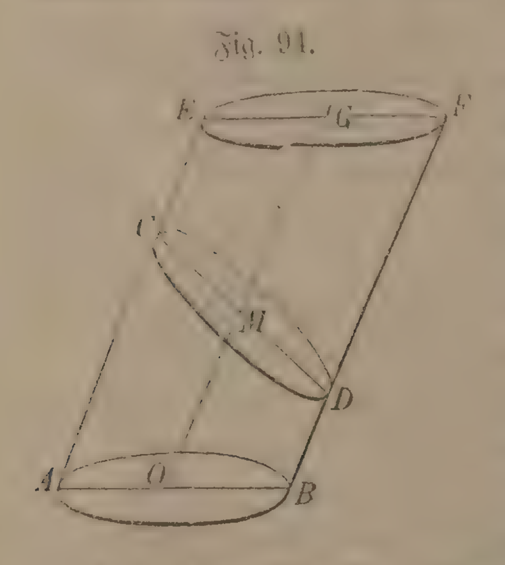


Fig. 94.

Es werde der schiefe Cylinder $ABFE$, dessen Grundfläche AB und Achse OG ist, von einer Ebene CD so geschnitten, daß der Neigungswinkel DMO dieser Ebene mit der Achse MO dem Neigungswinkel BOM der Grundfläche mit derselben Achse gleich ist; der Schnitt CD heißt ein Wechselschnitt.

1. Zusatz. Die Ebene des Wechselschnitts steht eben so wie die Grundfläche auf der Ebene des kleinsten Achsenschnittes (7) senkrecht.

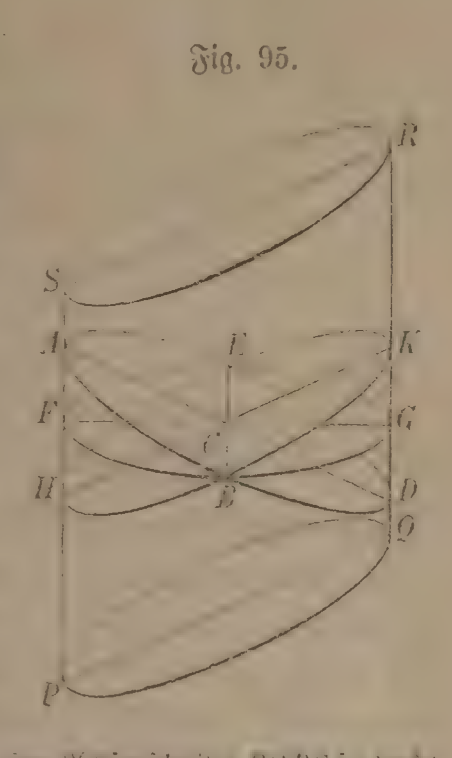
2. Zusatz. Alle Wechselschnitte eines schiefen Cylinders sind unter sich parallel.

3. Zusatz. Die beiden Linien, in welchen die Ebene des kleinsten Achsenschnitts von den Ebenen eines Wechselschnitts und der Grundfläche getroffen wird, bilden mit der Achse des Cylinders ein gleichschenkeliges Dreieck.

12. **Satz.** Jeder Wechselschnitt eines schiefen Cylinders ist ein Kreis, so groß wie die Grundfläche. Umgekehrt: ist der Durchschnitt des Cylinders mit einer der Grundfläche nicht parallelen Ebene ein Kreis, so ist er ein Wechselschnitt.

Erster Beweis. I. *ABDE* (Fig. 95) sei ein Wechselschnitt des schiefen Cylinders *PR*; die Ebene desselben treffe die Achse des Cylinders in *C* und schneide die Ebene des kleinsten (auf der Grundfläche also senkrechten) Achsenschnitts *PQRS* nach *AD*. Um zu zeigen, daß *ABDE* ein Kreis ist, lege man durch *C* noch zwei Ebenen, die eine parallel mit der Grundfläche, die andere senkrecht gegen die Achse. Jene, bis zur Cylinderfläche erweitert, bildet einen mit der Grundfläche congruenten (4), also kreisförmigen Parallelschnitt *HBKE*, diese einen gegen alle Seitenlinien des Cylinders senkrechten Querschnitt *FBGE*. Da die Ebenen aller drei Schnitte auf der des kleinsten Achsenschnitts *PQRS* senkrecht stehen und durch *C* gehen, so ist ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie *BCE* gleichfalls auf der Ebene *PQRS* senkrecht. *BE* theilt aber vermöge (10) die Figur des Querschnitts *FBGE* in zwei völlig gleiche Theile; denkt man sich daher den Cylinder um seine Achse gedreht, bis daß *CB* auf *CE*, *CE* auf *CB* zu liegen kommt, so vertauschen die beiden Hälften *EFB* und *BGE* des Querschnitts *FBGE* ihre Stelle und decken sich gegenseitig; zugleich aber decken sich gegenseitig die beiden Hälften der Cylinderfläche, in welche diese von den durch *B* und *E* gehenden Seitenlinien getheilt wird, denn alle Seitenlinien jener Fläche stehen auf der Ebene *FBGE* senkrecht. Ferner vertauschen auch die Ebenen des Wechselschnitts *ABDE* und des Parallelschnitts *HBKE* ihre Stelle und decken sich gegenseitig, denn nach der Voraussetzung haben beide gleiche Neigung gegen die Achse und bilden daher auch gleiche Neigungswinkel (*KCG* und *DCG* oder *ACF*) mit der Ebene des Querschnitts *EFBG*. Aus beiden Deckungen vereint folgt sogleich die Congruenz des Wechselschnitts *ABDE* mit dem Parallelschnitt *KEHB*. Da nun der letztere ein der Grundfläche gleicher Kreis ist, so ist es auch der erste.

Fig. 95.



II. Umgekehrt: nimmt man an, $ABDE$ (Fig. 96) sei ein der Grundfläche nicht paralleler, aber doch kreisförmiger Cylinderschnitt, so muß er ein Wechselschnitt sein. Denn erstlich ist (nach 10) der Punkt C, in welchem die Achse des Cylinders von der Ebene jenes Schnittes getroffen wird, der Mittelpunkt des Kreises $ABDE$, daher die Durchschnittslinie BE der Ebene dieses Schnitts und eines durch C geführten Parallelschnitts $HBKE$ ein gemeinschaftlicher Durchmesser beider; der Kreis $ABDE$ ist also der Grundfläche gleich, und, wenn die Ebenen $ABDE$ und $HBKE$ die des kleinsten Achsenschnitts in AD und HK treffen, Radius $CD = CK$. Es muß aber BE auf der Ebene des eben genannten Achsenschnitts senkrecht stehen; denn, wäre dieses nicht, so würde der durch C senkrecht gegen die Achse geführte Schnitt nicht durch B gehen, vielmehr würde er den Kreisumfang $HBKE$ in einem von B verschiedenen Punkte, etwa M, treffen und CM auf der Ebene des kleinsten Achsenschnitts $AHDK$ senkrecht stehen. Ein durch AD und CM geführter Schnitt wäre also ein Wechselschnitt, daher nach I. CM dem Radius der Grundfläche oder der CK gleich. Dies kann aber nicht sein; denn zieht man durch M eine Seitenlinie der Cylinderfläche, welche den Kreisumfang $ABDE$ in N trifft und verbindet N mit C, so entsteht ein bei M rechtwinkeliges Dreieck CMN, worin $CM < CN$. Da N im Umfange des Kreises $ABDE$ liegt, so ist $CN = CD$, folglich, da $CD = DK$, $CM < CK$ im Widerspruch mit dem Obigen. Es muß also BE auf der Ebene $AHDK$ senkrecht stehen, und folglich, da $\sphericalangle\, CKD = CDK$ (Neigungswinkel der Achse gegen die Ebene der Kreise $HBKE$ und $ABDE$), ist $ABDE$ ein Wechselschnitt.

Fig. 96.

Fig. 97.



Zweiter Beweis. I. Wie vorher sei (Fig. 97) AD der in der Ebene $PQRS$ des kleinsten Achsenschnitts eines Cylinders liegende Durchmesser eines Wechselschnitts desselben; C dessen Mittelpunkt, O der der Grundfläche, also CO ein Theil der Achse. Um die Congruenz des Wechselschnitts mit der Grundfläche darzuthun, sei $KL \parallel CO$

gezogen und durch KL eine gegen $PQDA$ senkrechte Ebene gelegt. Dieselbe schneide die Ebene des Wechselschnittes in KM, die Grundfläche in LN, den Cylindermantel in MN. Da nach der Voraussetzung $\sphericalangle OCD = COQ$, so ist (Planim. II., 41) $COLK$ ein gleichschenkeliges Trapez oder $CK = OL$; ferner sind nach I., 50 KM und LN auf der Ebene $APQD$ senkrecht, daher unter sich parallel; auch ist $MN \parallel KL$, deßhalb $MNLK$ ein Parallelogramm und $MK = NL$. Bringt man nun den Mittelpunkt C der Figur AMD auf den Mittelpunkt O der Grundfläche, legt CA auf OP, und die Ebenen beider Figuren zusammen, so fällt K in L, KM auf LN, M in N. Hieraus folgt die Congruenz des Wechselschnitts mit der Grundfläche.

II. Umgekehrt: angenommen AMD sei ein der Grundfläche nicht paralleler Schnitt des Cylinders und dabei ein Kreis. Wie im ersten Beweise schon gezeigt ist, muß dieser Kreis der Grundfläche gleich sein, daher müssen die Durchmesser AD, PQ gleiche Winkel mit der Achse bilden. Um noch zu beweisen, daß die Ebene AMD auf der des kleinsten Achsenschnitts $APQD$ senkrecht steht, ziehe man in der Grundfläche den Durchmesser $EF \perp PQ$, lege durch EF und die Achse OC eine Ebene, welche die Cylinderfläche in den Seitenlinien EG und FH, die Ebene AMD aber nach GH schneide. Da $EF \perp PQ$ und $PEQF \perp PQDA$, so ist auch $EF \perp PQDA$ und also auch $EF \perp OC$, daher das Trapez $EFHG$ bei E und F rechtwinkelig. In diesem Trapez ist aber wegen der Gleichheit der Kreise AMD und PNQ die Seite $GH = EF$; folglich muß dieses Trapez ein Rechteck sein und es ist $GH \parallel EF$. EF steht aber auf der Ebene $APQD$ senkrecht, daher auch GH und mithin auch die Ebene AGD auf $APQD$ senkrecht. $AGDH$ ist daher ein Wechselschnitt.

1. Zusatz. Führt man durch jeden der Endpunkte der Achse eines schiefen Cylinders einen Wechselschnitt, so ist der zwischen beiden und der erweiterten Cylinderfläche begriffene Körper ein dem ersten völlig gleicher oder ihm congruenter Cylinder.

2. Zusatz. Jeder andere Durchschnitt des Cylinders mit einer Ebene als die bisher besprochenen Schnitte ist eine Ellipse, deren Eigenschaften Gegenstand einer besondern Lehre sind. Die in der zweitfolgenden Nr. 14 enthaltene Construction kann dazu dienen, dieselbe einzuleiten.

13. Satz. **Jedem senkrechten Cylinder läßt sich eine Kugel einschreiben, welche den Mantel ringsum in einem größten Kreise berührt.**

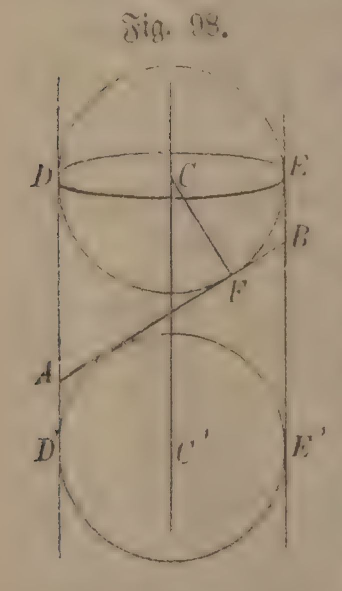
Umgekehrt: Wird eine Kugel ringsum vom Mantel eines Cylinders berührt, so ist dieser Cylinder ein senkrechter *).

Die erste Behauptung erhellt sofort, wenn man sich eine Kugel vorstellt, deren Radius dem der Grundfläche des Cylinders gleich ist, und deren Centrum in der Achse liegt. Der der Grundfläche parallele größte Kreis dieser Kugel steht auf der Achse des Cylinders und daher auch auf sämmtlichen Seitenlinien desselben senkrecht; diese berühren also die Kugel im Umfange jenes größten Kreises, der also zugleich der Berührungskreis zwischen Kugel und Cylindermantel ist. Zum Beweise der zweiten oder umgekehrten Behauptung ziehe man Radien der Kugel nach den Berührungspunkten zwischen dieser und dem Cylindermantel; sie stehen alle (II., 15) auf den Seitenlinien und daher auch auf der Achse des Cylinders senkrecht, liegen daher (I., 18) in einer Ebene. Dieser Ebene muß die Grundfläche des Cylinders parallel sein, wenn diese ein Kreis sein soll, sie steht daher senkrecht auf der Achse und der Cylinder ist ein senkrechter.

1. Zusatz. Ist die Achse des Cylinders dem Durchmesser der Grundfläche gleich und liegt der Mittelpunkt der Kugel im Mittelpunkte der Achse, so berührt die Kugel nicht allein den Mantel, sondern auch beide Grundflächen. Der Cylinder ist dann ein der Kugel umschriebener.

2. Zusatz. In einem schiefen Cylinder läßt sich keine Kugel beschreiben, die den Mantel ringsum berührte.

Fig. 98.



14. Aufgabe. Eine Kugel zu bestimmen, welche eine gegebene Cylinderfläche, deren senkrechter Querschnitt ein Kreis ist, und dabei eine der Lage nach gegebene Ebene berührt.

Auflösung. C sei der Mittelpunkt einer Kugel, welche im Umfange DE eines ihrer größten Kreise eine Cylinderfläche und im Punkte F eine gegebene Ebene berührt. C liegt auf der Achse CC' des Cylinders, CF aber steht auf der berührten Ebene senkrecht. Eine durch CF und die Achse gelegte Ebene steht also auch auf der berührten oder gegebenen Ebene senkrecht; ihr Durchschnitt damit sei AB,

*) Unter Cylinder ist hier, wie durchgehends, nur der Kreiscylinder zu verstehen.

der mit der Cylinderfläche die eine und andere der beiden Parallelen DD', EE', der endlich mit der Kugel der größte Kreis DFE. Da dieser letztere die drei genannten Linien AB, DD' und EE' berühren muß, so wird die Aufgabe darauf zurückgeführt, den Mittelpunkt C eines Kreises zu finden, der drei gegebene gerade Linien berührt. S. Planim. III., 33.

Zusatz. Wie es zwei gleiche Kreise gibt, welche drei gerade Linien, von denen zwei parallel sind, berühren, so gibt es auch zwei gleich große Kugeln, die eine Cylinderfläche der oben genannten Art und eine gegebene Ebene berühren können; nur darf die Ebene der Achse des Cylinders nicht parallel sein, es sei denn, daß sie die Cylinderfläche berührt.

15. Erklärung. Unter Kegelfläche oder konischer Fläche versteht man im allgemeinsten Sinne jede Fläche, die von einer geraden Linie beschrieben wird, wenn diese sich längs einer gegebenen krummen Linie (Directrix) so fortbewegt, daß sie dabei stets durch einen und denselben, also fest gedachten Punkt des Raumes geht. Die beschreibende gerade Linie wird dabei in jeder besondern Lage, die sie durch die Fortbewegung erhält, Seitenlinie der Kegelfläche genannt, der feste Punkt aber, in dem alle Seitenlinien zusammentreffen oder sich kreuzen, ist der Scheitel oder die Spitze der Fläche. Geht die beschreibende Linie über die Spitze hinaus und läuft nach beiden Seiten ohne Ende fort, so besteht die ganze Kegelfläche aus zwei, durch die Spitze getrennten, entgegengesetzt liegenden und ins Unendliche sich erstreckenden Theilen, von welchen einer die Gegenfläche des andern genannt werden kann. — Wird eine Kegelfläche von irgend einer durch die Spitze gehenden Ebene geschnitten, so bildet der Durchschnitt ein Paar im Scheitel sich kreuzender Seitenlinien.

16. Satz. **Die Kegelfläche ist eine gekrümmte Fläche, so jedoch, daß in der Richtung der Seitenlinien keine Krümmung Statt findet.**

Der Beweis dieses Satzes ist dem (in 2) für den Cylinder gegebenen ganz analog und kann fast mit denselben Worten wie dort geführt werden, wenn man nur die Verschiedenheit berücksichtigt, daß die Seitenlinien der Kegelfläche nicht parallel sind, sondern im Scheitel zusammenlaufen.

17. Satz. **Die Kegelfläche gehört zu denjenigen Flächen, die sich zur Ebene ausstrecken oder entrollen lassen.**

Auch der Beweis dieses Satzes erfordert nur eine Wiederholung der Worte des (in 3) für den Cylinder gegebenen; statt „prismatische Räume“ muß es nur heißen: „pyramidalische“.

18. Satz. **Die Durchschnitte der Kegelfläche mit zweien unter sich parallelen Ebenen bilden ähnliche Figuren.**

Die Beweisführung dieses Satzes ist der (in 4) für den Cylinder aufgestellten nachzubilden. Die dortige AB muß nun, nöthigenfalls verlängert, durch die Spitze der Kegelfläche gehen, und an die Stelle der dortigen Gleichheit zwischen AD und BM, AE und BN tritt Proportionalität ein.

19. Erklärungen. Unter Kegel (Conus) im allgemeinen Sinne des Wortes versteht man einen Körper, der von irgend einer Kegelfläche (15) und einer Ebene ringsum begrenzt wird. Diese Ebene, soweit sie den Kegel begrenzt, ist seine Grundfläche oder Basis, derjenige Theil der Kegelfläche aber, welcher zwischen Spitze und Grundfläche liegt, ist der Mantel des Kegels; beide zusammen bilden die Oberfläche. Seitenlinie des Kegels ist jede von der Spitze bis zum Umfange der Grundfläche gezogene gerade Linie; sie liegt, der Entstehung der Kegelfläche zufolge, ganz im Mantel.

Höhe eines Kegels ist der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, also die Länge eines von der Spitze auf die, nöthigenfalls erweiterte, Basis gefällten Perpendikels.

20. Erklärungen. Im engern Sinne und namentlich auf dem Gebiete der Elementar-Geometrie versteht man unter Kegel insgemein nur den Kreiskegel, d. h. denjenigen, dessen Grundfläche ein Kreis ist. Die gerade Linie, welche die Mitte dieses Kreises mit der Spitze des Kegels verbindet, ist die Achse desselben. Je nachdem die Achse senkrecht auf der Grundfläche steht, oder nicht, ist der Kegel ein senkrechter (auch wohl ein gerader) oder schiefer. Im senkrechten Kegel ist die Höhe der Achse gleich, im schiefen ist sie kleiner. Der senkrechte Kegel entsteht auch durch Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreiecks um eine seiner Katheten; die andere Kathete beschreibt dabei die Basis und die Hypotenuse den Mantel. Kegel sind ähnlich, wenn sich ihre Achsen wie die Radien der Grundfläche verhalten und gleiche Neigung gegen diese haben. In ähnlichen Kegeln verhalten sich die Höhen und je zwei der Lage nach entsprechende Seitenlinien wie die Achsen und wie die Radien der Grundflächen.

21. Satz. **Im senkrechten Kegel sind alle Seitenlinien gleich; im schiefen sind sie ungleich oder nur paarweise gleich; die größte und kleinste unter ihnen liegen mit der Achse in einer auf der Grundfläche senkrechten Ebene.**

Zum Beweise vergleiche man die von der Achse, einem Radius der Grundfläche und der entsprechenden Seitenlinie gebildeten Dreiecke; je zwei derselben sind im senkrechten Kegel congruent, befinden sich aber beim schiefen Kegel im Falle des Satzes Planim. II., 26, zu dessen Anwendung man sich auf I., 25 des gegenwärtigen Theils berufe. Nur wenn zwei Seitenlinien zu verschiedenen Seiten der im Satze gedachten Ebene liegen, können sie gleich sein.

22. Ein Kegel (im Sinne der Erklärung 20) und die ihn umschließende Kegelfläche (welche nebst ihrer Gegenfläche im Laufe dieses Abschnitts stets als unbegrenzt gedacht werden muß) kann auf verschiedene Weise von einer Ebene durchschnitten werden, wobei jedesmal ein Kegelschnitt im allgemeinen Sinne des Wortes entsteht:

a) Geht die Ebene durch den Scheitel des Kegels (Scheitelschnitt) und dabei entweder durch einen Punkt im Innern des Kegels oder durch zwei Punkte im Umfange der Grundfläche, so ist der Durchschnitt jedenfalls ein Dreieck, wovon zwei Seiten Kegelseiten sind, die dritte eine Sehne des Grundkreises ist.

b) Geht der Scheitelschnitt durch die Mitte der Grundfläche des Kegels, so enthält er die Achse und wird Achsenschnitt genannt. Jeder Achsenschnitt bildet ein Dreieck, von dem zwei Seiten Kegelseiten sind, die dritte ein Durchmesser der Grundfläche ist. Im geraden Kegel sind diese Dreiecke gleichschenkelig, congruent und alle senkrecht auf der Grundfläche. Im schiefen Kegel ist nur eines gleichschenkelig und nur eines ist auf der Grundfläche senkrecht; das erste aber hat gegen die Grundfläche dieselbe Neigung wie die Achse.

c) Ist die schneidende Ebene der Grundfläche des Kegels parallel, so entsteht (18) als Durchschnitt (jetzt Parallelschnitt) ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt. Sein Radius verhält sich zu dem der Grundfläche wie der zwischen ihm und der Spitze liegende Theil der Achse zur ganzen Achse. Deßhalb und wegen gleicher Neigung der Achse gegen die Grundfläche und die ihr parallele Ebene ist der von letzterer abgeschnittene kleinere Kegel dem ganzen Kegel ähnlich. Nimmt man ihn von diesem weg, so ist der Rest ein sogenannter abgestumpfter Kegel (Kegelstumpf). Die diesen begrenzenden beiden Kreise sind seine Grundflächen; deren (senkrechter) Abstand ist die Höhe; die Linie, welche ihre Mitten verbindet, die Achse des Stumpfes.

d) Ist die den Kegel schneidende Ebene der Grundfläche auch nicht parallel, so gibt es dennoch im schiefen Kegel, eben so wie dies beim schiefen

Cylinder der Fall war, eine besondere Lage für jene Ebene, wobei ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche ein Kreis ist. Dieser Schnitt heißt auch beim Kegel „Wechselschnitt“ und wird später (29) Gegenstand besonderer Definition und Beweisführung sein.

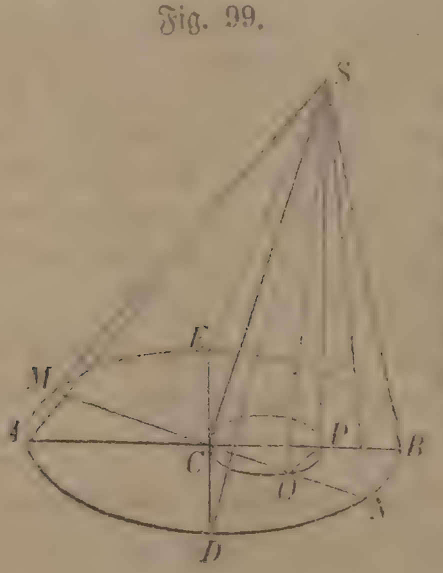
e) In jedem andern Falle ist der Durchschnitt der Kegelfläche mit einer Ebene eine vom Kreise verschiedene krumme Linie (Curve), die, je nachdem sie in sich selbst zurückgeht und eine geschlossene Figur darstellt, oder nicht in sich zurückkehrt und dann entweder nur aus einem oder aus zwei unendlichen Zweigen besteht, **Ellipse, Parabel, Hyperbel** genannt wird. Diese drei Arten von Linien sind es, die man im eigenthümlichen Sinne **Kegelschnitte** nennt, und die in der analytischen Geometrie sich als **Linien zweiter Ordnung** darstellen. Der Kreis ist dann als ein specieller Fall zu betrachten, den die Ellipse darbietet und wobei diese in jenen übergeht.

23. Satz. **Je nachdem die Achse eines Kegels eben so groß, größer oder kleiner als der Radius der Grundfläche ist, ist der an der Kegelspitze liegende Winkel aller Achsenschnitte ein rechter, spitzer oder stumpfer und umgekehrt: dabei ist die Quadratsumme der beiden ihn einschließenden Seiten im ersten Falle eben so groß, im zweiten größer, im dritten kleiner als das Quadrat des Durchmessers der Grundfläche.**

Die Richtigkeit der ersten Behauptung wird leicht aus Planim. III., 19 abgeleitet, wenn man einem der Achsenschnitte einen Kreis umschreibt; die zweite folgt gleich aus Planim. IV., 29.

Zusatz. Die Winkel an der Kegelspitze der verschiedenen Achsenschnitte eines Kegels sind stets gleichartig; im senkrechten Kegel selbst gleich.

Fig. 99.



24. Satz. **Von zwei Achsenschnitten eines Kegels ist derjenige der an Inhalt größere, welcher mit der Grundfläche den kleineren Neigungswinkel bildet: der kleinste Achsenschnitt steht auf der Grundfläche senkrecht, der größte hat gegen die Grundfläche dieselbe Neigung wie die Achse und steht auf dem kleinsten senkrecht.**

Beweis. SMN sei ein beliebiger Achsenschnitt des Kegels SAB, dessen Spitze

S ist; SP sei ein aus S auf die Grundfläche gefälltes Loth oder das Höhenperpendikel des Kegels. Fällt man $PO \perp MN$ und verbindet O mit S, so ist (I., 26) auch $SO \perp MN$, also SO die Höhe des Dreieckes SMN. Da die Grundlinie MN dieses Dreieckes in allen Achsenschnitten dieselbe Länge hat, so hängt die Größe des Dreieckes SMN nur noch von seiner Höhe SO ab; SO aber verändert sich mit dem Winkel SOP, dem Neigungswinkel der Ebene SMN, mit der Grundfläche. Hieraus und mit Berücksichtigung von I., 51 ergeben sich leicht die Aufstellungen des Satzes.

1. Zusatz. Der kleinste Abschnitt ASB enthält die größte und kleinste Seitenlinie des Kegels; der größte bildet ein gleichschenkeliges Dreieck SDE.

2. Zusatz. Die Endpunkte O aller von der Kegelspitze S auf die Durchmesser der Grundfläche gefällten Perpendikel liegen im Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser CP ist.

25. Satz. **Zieht man durch einen Punkt im Umfang der Basis eines Kegels eine Seitenlinie des letztern und eine Tangente zur Basis, so wird 1) jede dritte gerade Linie, welche zwei Punkte jener Geraden verbindet, die Kegelfläche in einem Punkte der Seitenlinie; 2) eine durch beide Linien gelegte Ebene dieselbe Fläche längs der ganzen Seitenlinie berühren.**

Der Beweis ist dem (in 8) für den Cylinder geführten ganz analog. An die Stelle der dortigen Parallele OP tritt eine durch O zu ziehende Seitenlinie. Auch gilt der dortige Zusatz vom Kegel.

26. Aufgabe. **Durch einen außerhalb des Kegels gegebenen Punkt eine Berührungsebene an denselben zu legen.**

Die Auflösung ist auf den vorigen Satz zu gründen und ohne Schwierigkeit, wenn man bemerkt, daß die Berührungsebene die gerade Linie enthalten muß, welche den gegebenen Punkt mit der Kegelspitze verbindet. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die genannte Verbindungslinie der Grundfläche des Kegels parallel ist oder nicht. In beiden gibt es zwei Berührungs-Ebenen, deren Durchschnitte mit der Grundfläche Tangenten an dieser sind. Diese Tangenten sind aber im ersten Falle parallel, im zweiten treffen sie mit der genannten Verbindungslinie in einem Punkte zusammen.

27. Hülfsaufgabe. **Einem gegebenen Kegel eine Kugel zu umschreiben, d. i. eine Kugel zu bestimmen, welche die Spitze des Kegels und den Umfang seiner Grundfläche enthält.**

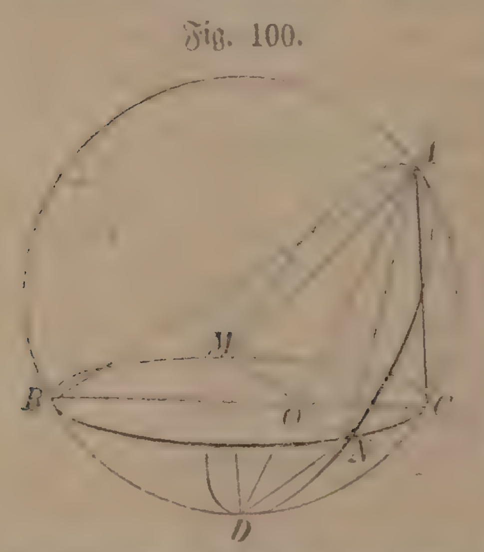
Die verlangte Bestimmung ist leicht, sobald man erwägt, daß das Centrum der Kugel in einem auf der Grundfläche in deren Mitte errichteten Perpendikel

also auch in dem auf der Grundfläche senkrechten Achsenschnitte liegen muß. Der Mittelpunkt des diesem Schnitte umgeschriebenen Kreises ist auch der Mittelpunkt der Kugel.

28. **Satz.** **Diejenige Linie, welche den von der größten und kleinsten Seite eines schiefen Kegels gebildeten Winkel halbirt, halbirt auch alle übrigen Winkel, welche je zwei mit ihr in einerlei Ebene liegende Kegelseiten mit einander machen.**

Beweis. A sei der Scheitel, $BNCM$ die Grundfläche eines schiefen Kegels, ABC dessen auf der Grundfläche senkrechter Achsenschnitt, also (21), wenn $AB > AC$, AB die größte, AC die kleinste Kegelseite. Denkt man sich nun (nach 27) eine Kugel, deren Oberfläche durch A geht und den Umfang $BNCM$ in sich enthält, so wird eine den Winkel BAC halbirende Linie die Oberfläche dieser Kugel im sphärischen Mittelpunkte D des Grundkreises $BMCN$ treffen, mithin (II., 11) D von allen Punkten des Umfangs $BNCM$ sowohl gleichen sphärischen als gleichen geraden Abstand haben. Legt man nun durch AD eine beliebige Ebene, welche die Grundfläche des Kegels nach MN, die

Fig. 100.



Kegelfläche nach AM und AN, die Kugelfläche aber in einem kleinen Kreise $AMDN$ schneidet, so ist in diesem letztern Kreise Sehne $MD = DN$, daher auch Bogen $MD = DN$, und also auch $\measuredangle\, MAD = NAD$, oder, wenn AD die BC in O trifft, $\measuredangle\, MAO = NAO$ w. z. b. w.

Zusatz. Ein auf AO senkrechter Querschnitt des Kegels bildet eine krummlinige Figur, die einen in AO liegenden Mittelpunkt hat.

29. Erklärung. Die in vorhergehender Nummer betrachtete Linie AO, welche nicht allein den von der größten und kleinsten Kegelseite gebildeten Winkel, sondern zugleich alle übrigen Winkel halbirt, die von je zweien in einerlei Ebene mit ihr liegenden Kegelseiten gebildet werden, heiße, weil sie in gewisser Beziehung in der Mitte des von der Kegelfläche begrenzten Raumes liegt, auch die Mittelpunkte sämmtlicher auf ihr senkrechter (elliptischer

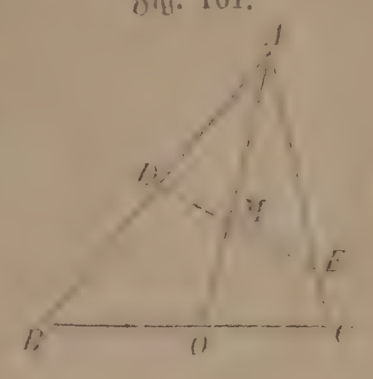
Querschnitte des Kegels enthält, die **Mittellinie** des Kegels*). Dieselbe fällt nur im geraden Kegel mit der Achse zusammen. — Wird nun ein schiefer Kegel von einer der Grundfläche nicht parallelen Ebene so geschnitten, daß die Mittellinie dabei gleiche und unter sich in einer Ebene liegende Neigungswinkel mit der schneidenden Ebene und der Grundfläche bildet, so wird ein solcher Durchschnitt, wie beim Cylinder, **Wechselschnitt** genannt. Aus dieser Erklärung folgt:

1) Die Ebene eines Wechselschnitts steht, so wie die Grundfläche, auf der Ebene des kleinsten Achsenschnitts (24) senkrecht.

2) Alle Wechselschnitte eines und desselben Kegels sind unter einander parallel.

3) Die Durchschnittslinien des Wechselschnitts und der Grundfläche mit der Ebene des kleinsten Achsenschnitts bilden mit der größten und kleinsten Kegelseite gleiche, aber verwechselt oder verschiedenseitig liegende Winkel. Ist also ABC (Fig. 101) der kleinste Achsenschnitt, AB die längste, AC die kürzeste Kegelseite, AO die Mittellinie, DE der Durchschnitt der Ebene des Wechselschnitts mit der des Dreieckes ABC und trifft DE die AO in M, so ist nach der obigen Definition $\sphericalangle\, BAO = OAC$ und $\sphericalangle\, AOC = OME$ oder AMD, woraus folgt, daß auch $\sphericalangle\, ABC = AED$ und $\sphericalangle\, ACB = ADE$.

Fig. 101.



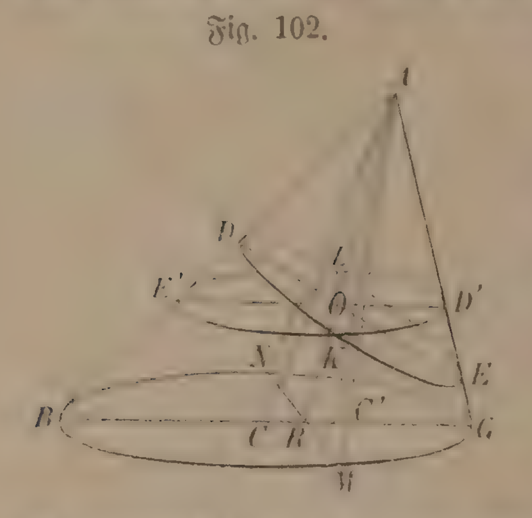
30. **Satz.** Jeder Wechselschnitt eines schiefen Kegels ist ein Kreis. Der Mittelpunkt desselben liegt auf einer durch den Scheitel des Kegels gehenden und in der Ebene des kleinsten Achsenschnitts liegenden Geraden, die von der Mittellinie denselben Winkel Abstand hat wie die Achse.

Beweis. ABG (Fig. 102) sei ein schiefer Kegel, AC dessen Achse und AR dessen Mittellinie; beide liegen in der Ebene des auf der Grundfläche lothrechten Achsenschnitts ABG. $DKEL$ sei ein Wechselschnitt, dessen Ebene die des Dreieckes ABG nach DE durchschneide und die Mittellinie AR in O treffe. Um zu beweisen, daß derselbe ein Kreis ist, lege man noch durch O eine der

*) Wir erlauben uns diese, zu Gunsten der Kürze hier eingeführte Bezeichnung, da sie für die hier aufgenommene Behandlung des Wechselschnitts nothwendig ist, wenigstens zweckmäßig erscheint.

Grundfläche des Kegels parallele Ebene; der Durchschnitt derselben mit dem Kegel ist (22, e) ein Kreis $D'LE'K$, dessen Mittelpunkt in der Achse AC liegt. Denkt man sich nun den ganzen Kegel um die Mittellinie AR gedreht, und

Fig. 102.



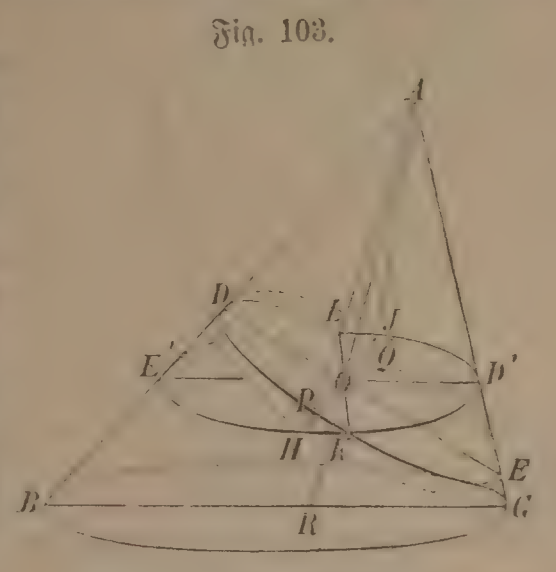
zwar um die Hälfte einer vollen Umdrehung, so wird einerseits, wie aus Satz 28 sogleich folgt, von den beiden durch die größte und kleinste Seitenlinie getrennten Hälften der Kegelfläche die eine genau an die Stelle der andern kommen und sich als congruent mit ihr darstellen, indem jede Seitenlinie wie AM auf der einen in die Lage der ihr in Beziehung auf AR gegenüber liegenden Seitenlinie AN auf der andern tritt; andererseits folgt aus der Erklärung des Wechselschnitts (29), daß $\sphericalangle EOR = GRO = E'OR$; daher und weil sowohl die Ebene des Wechselschnitts $DKEL$ als die des Parallelschnitts $E'KD'L$ auf ABG senkrecht steht, tritt nach der gedachten Umdrehung die erste Ebene in die Lage der zweiten und zwar legt sich der vordere Theil DKE der ersten auf den hintern Theil $D'LE'$ des andern, so wie der hintere Theil DLE jener auf den vordern Theil $D'KE'$ von dieser. Da nun diejenigen beiden Flächen, deren Durchschnitt die Figur $DKEL$ ist, mit denjenigen Flächen, deren Durchschnitt die Figur $D'LE'K$ ist, zusammenfallen, so müssen diese Figuren selbst congruent sein. Nun ist aber die eine derselben, $D'LE'K$, ein Kreis, also ist es auch die andere $DKEL$. — Was den Mittelpunkt dieser letztern betrifft, so liegt er offenbar da, wohin der Mittelpunkt des Parallelschnitts nach der Umdrehung zu liegen kommt, daher auf einer geraden Linie, welche durch die Umdrehung in die Lage der Achse tritt, d. i. die im Satze bezeichnete.

Zusatz. Führt man den Wechselschnitt durch den Punkt R, in welchem die Mittellinie des Kegels die Grundfläche trifft, so wird jener der Grundfläche völlig gleich, so wie der durch den Wechselschnitt begrenzte Kegel dem gegebenen congruent ist. Die Achse dieses zweiten Kegels kann gleichsam als zweite Achse des ersten angesehen werden.

31. Satz. Umkehrung des vorigen: Ist ein Kegelschnitt ein Kreis und der Grundfläche nicht parallel, so ist er ein Wechselschnitt.

Beweis. $DKEL$ sei der Durchschnitt eines schiefen Kegels mit einer der Grundfläche BG nicht parallelen Ebene und dieser Durchschnitt sei ein Kreis. Die Ebene schneide die des kleinsten Achsenschnitts ABG nach DE, die Mittellinie des Kegels aber in O. Durch O sei eine der Grundfläche parallele Ebene gelegt, welche die Ebene $DKEL$ nach KL schneidet und mit der Kegelfläche den kreisförmigen Parallelschnitt $E'KD'L$ bildet, dessen Mittelpunkt in der Achse liegt. Da KL eine gemeinschaftliche Sehne beider Kreise ist, so ist $DO \times OE = KO \times OL = E'O \times OD'$; folglich läßt sich (Plan. IV., 32, Zus. 3) durch E', E, D' und D ein Kreis beschreiben

Fig. 103.



und es ist daher $\sphericalangle\, DE'O = D'EO$, also auch $\sphericalangle\, EOR = E'OR$. Hiernach bleibt, um zu beweisen, daß $DKEL$ ein Wechselschnitt ist, nur übrig, zu zeigen, daß die Ebene dieses Kreises auf der des Dreieckes ABG senkrecht ist. Gesetzt, dieses wäre nicht der Fall, so könnte man durch DE eine andere, gegen ABG senkrechte Ebene legen; ihr Durchschnitt mit der Kegelfläche würde ein Wechselschnitt $DHEQ$ sein, dessen Ebene die des Kreises $E'KD'L$ nach HOJ schneide. Die durch HJ und AO gelegte Ebene schneide die des Kreises $DKEL$ nach PQ; es ist nun das Rechteck $PO \times OQ = DO \times OE$, und dieses letztere $= HO \times OJ$, folglich ließe sich durch H, P, J und Q ein Kreis beschreiben und es wäre $\sphericalangle\, PHO = OQJ$. Dieses ist aber nicht möglich, denn da HJ als Durchschnitt zweier auf ABG senkrechten Ebenen selbst senkrecht auf ABG, und daher auch auf AO steht, auch $\sphericalangle\, HAO = OAQ$ (28), so ist $\sphericalangle\, AHO$ oder $PHO = AJO < OQJ$. Mithin muß die Ebene des Kreises $DKEL$ auf ABG senkrecht stehen und dieser Kreis ist ein Wechselschnitt.

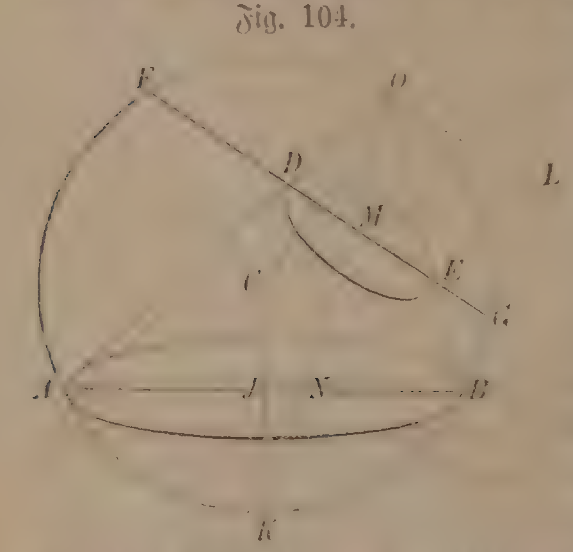
Zusatz. Ein Kegelschnitt, der weder ein Wechselschnitt, noch der Grundebene parallel ist, kann also auch kein Kreis sein.

Anmerkung. Einen andern Beweis für diesen und den vorhergehenden Satz findet man unter andern in H. Hamilton's Lehre von den Kegelschnitten I. Buch, S. 8 u. 9. Wir haben die oben gegebenen Beweise vorgezogen, nicht weil sie uns eigenthümlich sind, sondern weil sie, wie wir glauben, in den Gegenstand tiefer eindringen und natürlicher sind.

32. **Satz.** Ist einem schiefen Kegel eine Kugel umschrieben (27), so ist der Durchschnitt der Kegelfläche mit jeder Ebene, die auf dem nach der Spitze des Kegels gezogenen Radius senkrecht steht, ein Wechselschnitt, also ein Kreis.

Dem schiefen Kegel OAB, dessen Scheitel O, sei eine Kugel umgeschrieben, deren Mittelpunkt C sei, und auf dem Radius CO oder dessen Verlängerung stehe eine Ebene senkrecht, deren Durchschnitt mit der des kleinsten Achsenschnitts AOB die Gerade FG sei, so wird der Durchschnitt DE dieser Ebene mit dem Kegelmantel ein Wechselschnitt sein. Denn erstlich ist diese Ebene auf OAB senkrecht und daher sind, wenn OK den Winkel AOB halbirt und FG in M, AB in N, die Kugelfläche in K trifft, die Winkel GMN und BNM die Neigungen der Mittellinie OK gegen die in Rede stehende Durchschnitts-Ebene FG und die Grundfläche AB. Diese Winkel sind ferner gleich; denn, zieht man noch an O eine Tangente OL, so ersieht man leicht, daß $\sphericalangle\, GMN = LOM = 1\, R - COK = 1\, R - CKO = JNK = BNM$. Es vereinigen sich daher im Durchschnitte DE die Bedingungen des Wechselschnitts.

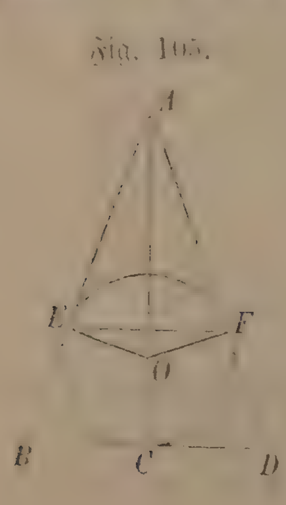
Fig. 104.



Anmerkung. Eine wichtige Anwendung dieses Satzes wird bei der sogenannten stereographischen Projection der Erd- und Himmelskugel gemacht. S. den Anhang. V.

33. **Satz. Jedem senkrechten Kegel läßt sich eine Kugel einschreiben, welche den Mantel ringsum in einem kleinen Kreise berührt. Umgekehrt: wird eine Kugel ringsum vom Mantel eines Kegels berührt, so ist dieser ein senkrechter.**

Fig. 105.



Die erste Behauptung wird gleich als eine richtige erkannt, wenn man sich einen der Achsenschnitte ABD des Kegels vorstellt und demselben einen die Seiten berührenden Kreis CEF einschreibt,

Bei Umdrehung der Figur um die Achse AC beschreibt dann das gleichschenkelige Dreieck ABD den Kegel, der Kreis aber die diesem einzuschreibende Kugel, deren Construction also auf die jenes Kreises zurückgeführt wird.

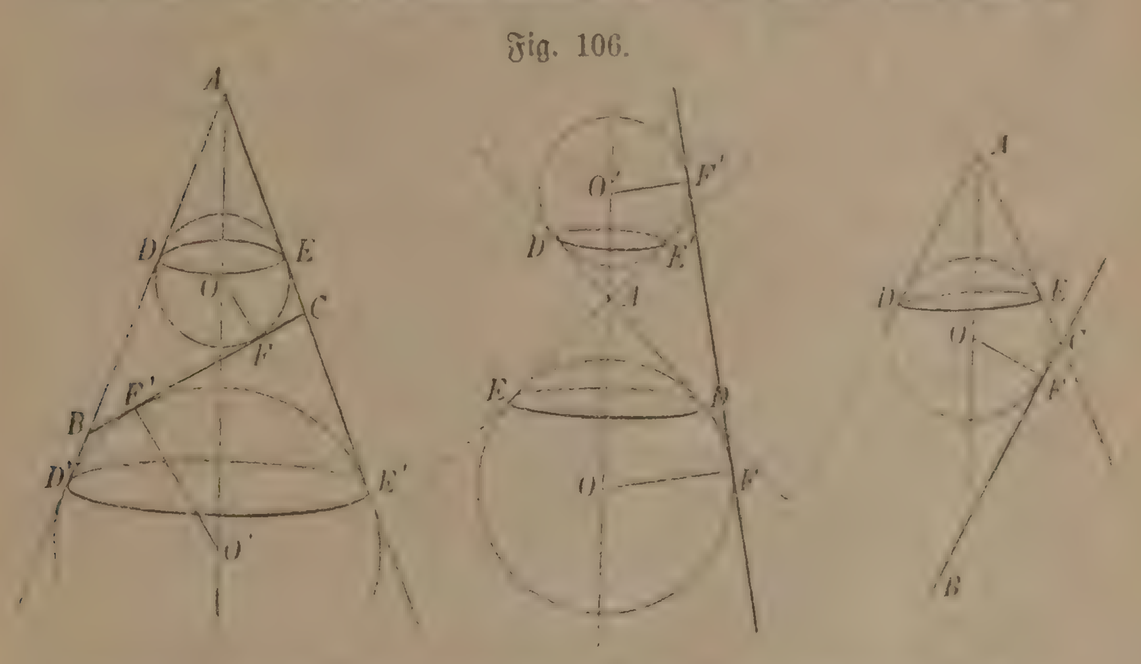
Die Umkehrung beruht darauf, daß, wenn eine Kegelfläche die Kugel berührt, alle Seitenlinien jener Fläche Tangenten der letzteren sind. Leicht ist zu zeigen, daß die Berührungspunkte im Umfange eines Kreises liegen, dessen Ebene auf der die Kegelspitze mit dem Kugelcentrum verbindenden Geraden senkrecht steht. Diese Gerade ist die Achse des Kegels.

Zusatz. Ist die Seite des geraden Kegels $= a$, die Höhe $= h$, der Radius seiner Grundfläche $= r$, so daß $h^2 + r^2 = a^2$, so ist der Radius der ihm eingeschriebenen Kugel $= \frac{rh}{a + r}$, der Radius des Berührungskreises $= r - \frac{r^2}{a}$.

34. Aufgabe. Eine Kugel zu bestimmen, welche eine gegebene Kegelfläche von kreisförmigem auf der Achse senkrechtem Querschnitt und dabei eine der Lage nach gegebene Ebene berührt.

Die Auflösung ist ganz analog der in 14 für den Cylinder gegebenen und reducirt sich, durch ähnliche Schlüsse wie dort, darauf, einen Kreis zu

Fig. 106.



beschreiben, der die drei Seiten des durch einen auf der gegebenen Ebene senkrechten Achsenschnitt gebildeten Dreieckes berührt. Der Mittelpunkt eines solchen Kreises ist auch der Mittelpunkt der verlangten Kugel. Zu bemerken

bleibt: Ist die gegebene Ebene keiner Kegelseite parallel, so gibt es zwei Kugeln, welche diese Ebene und die Kegelfläche berühren können, und diese liegen auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Kegelspitze, je nachdem die Ebene nur auf einer Seite oder auf zwei Seiten der Spitze die Kegelfläche trifft; ist aber die gegebene Ebene einer Kegelseite parallel, so gibt es auch nur eine sie und die Kegelseite berührende Kugel. S. d. Figuren.

Zweiter Abschnitt.

Inhalt des Cylinder- und Kegelmantels.

35. Vorbemerkung. Nachdem im ersten Theile dieser Geometrie Cap. VI., 21 und 26 dargethan worden, daß bei der Kreismessung (d. i. bei der Bestimmung des Verhältnisses zweier Kreisumfänge unter sich und zum Radius, so wie zweier Kreise unter sich und zum Quadrate des Radius) die Vorstellung des Kreises als eines regulären Polygons von unzählig vielen, unendlich kleinen Seiten zu richtigen Resultaten führt, zu denselben nämlich, welche auch auf dem Wege strengerer Beweisführung, wie sie jenen Sätzen des ersten Theils beigefügt worden, gewonnen werden, wird es unbedenklich erlaubt sein, diese Vorstellung im weitern Verfolge festzuhalten und sie überall zum Grunde zu legen, wo es auf die Bestimmung von Größen ankommt, die vom Kreise oder von krummgestalteten Größen überhaupt abhängen, um weitere Schlüsse darauf zu bauen. Nicht allein wird dadurch die Ermittelung des Inhaltes gekrümmter Flächen und der davon begrenzten Körper sehr erleichtert und gewinnt bedeutend an Kürze, ohne daß der Richtigkeit der Resultate der geringste Eintrag geschähe, sondern es wird dadurch eine Methode *) befolgt, die ohnehin in der höheren Geometrie nicht leicht entbehrt werden kann. Nichts desto weniger haben wir, um auch den äußersten Anforderungen hinsichtlich der Strenge der Beweise gerecht zu sein, im Anhange VI. die nach Euklidischem Muster gebildeten strengeren Beweise der Hauptsätze dieses und des folgenden Abschnittes zusammengestellt und begnügen uns hier, auf diesen zu verweisen.

*) Die sogenannte Infinitesimal-Methode.

36. Satz. Der Mantel eines senkrechten Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite dem Umfange der Grundfläche und dessen andere der Höhe oder Achse des Cylinders an Länge gleich kommt.

Beweis. Sieht man den Kreis, der die Grundfläche des Cylinders bildet, als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten an, so muß man folgerichtig den Cylinder als ein Prisma betrachten, dessen Grundfläche jenes Polygon ist, und dessen Seitenkanten der Cylinderachse parallel sind. Ist der Cylinder ein senkrechter, so ist es auch das Prisma, und der Mantel besteht dann aus unzählig vielen Rechtecken, deren Grundlinien die Seiten jenes Polygons sind und deren gemeinschaftliche Höhe der Achse oder Höhe des Cylinders gleich kommt. Der Inhalt des Mantels ist die Summe dieser Rechtecke. Hieraus folgt sogleich die Richtigkeit des Satzes.

Anm. Durch Entrollung des Cylindermantels in eine Ebene (s. 3 dieses Cap.) entsteht, wofern der Cylinder ein senkrechter ist, das in Rede stehende Rechteck unmittelbar.

Zusatz 1. Die Mäntel senkrechter Cylinder von gleicher Höhe verhalten sich wie die Umfänge, also auch wie die Durch- oder Halbmesser der Grundflächen, die von gleicher Grundfläche wie die Höhen; überhaupt stehen die Mäntel senkrechter Cylinder im zusammengesetzten Verhältnisse der Radien der Grundflächen und der Höhen.

Zusatz 2. Zwei senkrechte Cylinder, deren Achsen oder Höhen sich umgekehrt wie die Durchmesser der Grundflächen verhalten, haben gleichen Inhalt des Mantels.

Zusatz 3. Die Mäntel ähnlicher senkrechter Cylinder, d. i. solcher, deren Achsen sich wie die Radien der Grundflächen verhalten, stehen im Verhältniß der Quadrate dieser Linien.

Zusatz 4. Der Mantel eines senkrechten Cylinders verhält sich zu dessen Grundfläche, wie die doppelte Höhe zum Radius.

Zusatz 5. Ist der Radius der Grundfläche eines senkrechten Cylinders $= r$, seine Achse oder Höhe $= h$, so ist der Flächeninhalt des Mantels $= 2\pi rh$, die ganze Oberfläche des Körpers $= 2\pi r (h + r)$. Diese ganze Oberfläche ist also auch dem Mantel eines Cylinders von derselben Basis und der Höhe $h + r$ gleich.

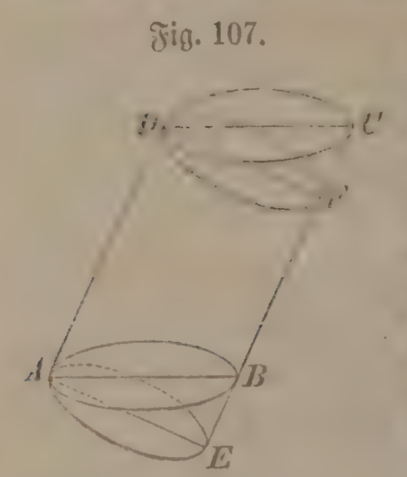
Beispiel. $r = 22{,}35^{\text{cm}}$, $h = 37{,}25^{\text{cm}}$; Mantelfläche $= 5230{,}9874 \,\square^{\text{cm}}$, Gesammtfläche $8369{,}5798 \,\square^{\text{cm}}$.

37. Aufgabe. Einen Kreis anzugeben, der 1) dem Mantel eines senkrechten Cylinders, 2) dessen ganzer Oberfläche an Inhalt gleich ist.

Durch eine leicht auszuführende Combination des vorhergehenden Satzes mit den Sätzen 21 und 26, VI. Cap. der Planimetrie, oder auch durch Benutzung der in Zus. 5 der vorigen Nr. und in VI., 39 der Plan. gegebenen arithmetischen Ausdrücke stellt sich bald heraus, daß der Radius des verlangten Kreises durch Construction einer mittlern Proportionale gewonnen wird. Das Nähere wird eigener Auffindung überlassen.

38. Satz. Der Mantel eines schiefen Cylinders ist einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite der Achse und dessen andere Seite dem Umfange eines auf der Achse senkrechten (elliptischen) Querschnittes gleich ist.

Fig. 107.



Beweis. $ABCD$ sei ein schiefer Cylinder, dessen Mantel man sich über die Grundfläche AB hinaus erweitert denke. Führt man durch die Endpunkte A und D einer beliebigen Seitenlinie AD dieses Cylinders zwei auf dieser und also auch auf allen übrigen und auf der Achse senkrechte Ebenen, so entstehen zwei elliptische Querschnitte AE und DF, welche gemäß (4) congruente Figuren sind. Leicht läßt sich nun nachweisen, daß auch die zwischen diesen Querschnitten und den Grundflächen liegenden hufförmigen Abschnitte ABE und DCF völlig congruent sind, und daß daher die Theile der Cylinderfläche, welche diese Abschnitte theilweise begrenzen, gleiche Größe haben. Hieraus folgt, daß der Mantel des schiefen Cylinders $ABCD$ denselben Inhalt hat, wie der des senkrechten Cylinders $AEFD$. Von diesem letztern läßt sich aber ganz auf dieselbe Weise wie in (36) darthun, daß er einem Rechteck gleich sei, dessen eine Seite dem Umfange der Grundfläche, d. i. des auf der Achse senkrechten (elliptischen) Querschnitts, die andere der Höhe dieses Cylinders, d. i. der Achse des schiefen gleich kommt, daher u. s. w.

Ueber die Seitenfläche hufförmiger Cylinder-Abschnitte s. VI. Anhang.

39. Satz. Der Mantel eines senkrechten Kegels ist an Inhalt einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie dem Umfange der Kegelgrundfläche und dessen Höhe der Seite des Kegels an Länge gleich kommt.

Beweis. Sieht man, wie beim Cylinder, den Kreis, der die Grundfläche des Kegels ist, als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten an, so muß man folgerichtig den Kegel als eine Pyramide

betrachten, deren Grundfläche jenes Polygon und deren Spitze die des Kegels ist. Ist dieser Kegel ein senkrechter oder gerader, so ist die Pyramide eine regelmäßige (reguläre) III., 3 und der Mantel besteht dann aus unzählig vielen gleichschenkeligen Dreiecken, deren Grundlinien die Seiten jenes Polygones sind und deren gemeinschaftliche Höhe der Seitenlinie des Kegels gleich kommt. Der Mantel ist die Summe dieser Dreiecke, woraus sogleich die Richtigkeit des Satzes folgt.

Anm. Durch Entrollung des Kegelmantels in eine Ebene (s. Satz 17 d. Cap.) entsteht, wofern der Kegel ein gerader ist, zunächst ein Kreissector, dessen Radius der Seite des Kegels und dessen Bogen dem Umfange seiner Grundfläche an Länge gleich ist. Dieser Sector ist selbst wieder nach Planim. VI., 26, Zus. 2 dem im Satze genannten Dreiecke gleich.

Zusatz 1. Die Mäntel senkrechter Kegel von gleicher Seitenlänge verhalten sich wie die Umfänge, also auch wie die Durch- oder Halbmesser der Grundflächen, die von gleicher Grundfläche wie die Seitenlängen. Ueberhaupt stehen die Mäntel zweier geraden Kegel im zusammengesetzten Verhältnisse der Seitenlängen und der Halbmesser der Grundflächen.

Zusatz 2. Zwei senkrechte Kegel, deren Seitenlängen sich umgekehrt wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, haben gleichen Mantelinhalt.

Zusatz 3. Die Mäntel ähnlicher Kegel (20) verhalten sich wie die Quadrate sowohl der Radien als der Achsen.

Zusatz 4. Der Mantel eines senkrechten Kegels verhält sich zu seiner Grundfläche, wie die Seitenlänge zum Radius der letztern.

Zusatz 5. Ist der Radius der Grundfläche eines senkrechten Kegels $= r$, die Achse $= a$, die Seitenlänge $= l$, so ist $l^2 = a^2 + r^2$, der Mantel $= \pi r l = \pi r \sqrt{a^2 + r^2}$, die ganze Oberfläche $= \pi r\,(l + r)$.

Beispiel. $r = 22{,}35^{\text{cm}}$, $a = 29{,}80^{\text{cm}}$; hieraus $l = 37{,}25^{\text{cm}}$, die Mantelfläche $= 2615{,}4987$ □^{cm}, die Gesammtoberfläche $= 4184{,}7899$ □^{cm}.

40. Aufgabe. Einen Kreis anzugeben, der 1) dem Mantel eines senkrechten Kegels 2) dessen ganzer Oberfläche an Inhalt gleich kommt.

Das in 37 beim Cylinder Gesagte gilt auch hier und ist daher nur zu wiederholen.

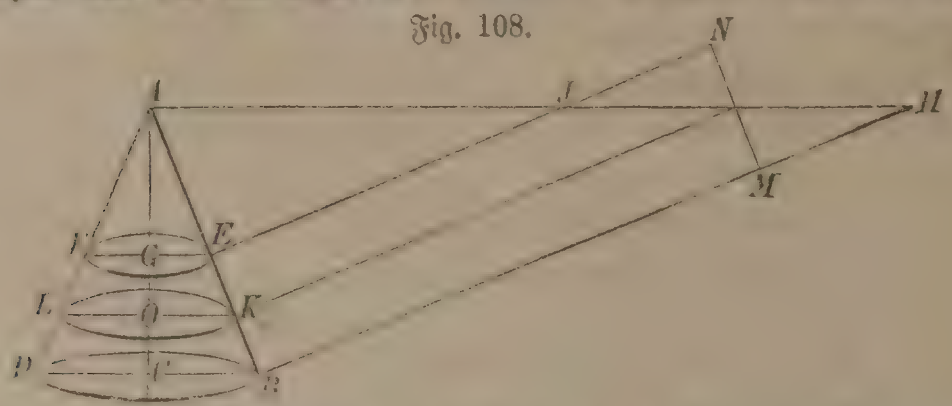
41. Aufgabe. Den Centriwinkel des durch Entrollung des Kegelmantels entstehenden Kreissectors zu bestimmen.

Man wird finden, daß derselbe sich zu 4 R eben so verhält, wie der Radius zur Seitenlänge (vgl. Zus. 4 zu 39).

42. Satz. **Der Mantel eines senkrechten abgestumpften Kegels (22) ist einem Rechtecke gleich, von welchem eine Seite der Seitenlänge oder Breite des Mantels, die andere der halben Summe der ihn begrenzenden Kreisumfänge gleich kommt.**

Beweis. $BDFE$ sei ein abgestumpfter Kegel, durch Abschneidung des Kegels AEF von dem Kegel ABD entstanden. Errichtet man auf der Seite

Fig. 108.



AB in B die Senkrechte BH = dem Umfange der Grundfläche BD, verbindet H mit A und zieht $EJ \parallel BH$, so folgt aus Plan. VI., 21, daß EJ dem Umfange der Grundfläche EF gleich sei. Nach 39 ist der Mantel des Kegels ABD dem Dreiecke ABH, der Mantel des Kegels AEF dem Dreiecke AEJ, folglich der Mantel $BDFE$ des abgestumpften Kegels dem Trapez $BEJH$ gleich. Durch Verwandlung dieses Trapezes in ein Rechteck $BMNE$ folgt der Ausspruch des Satzes.

Zusatz 1. Legt man durch die Mitte O der Achse CG eine Ebene, so schneidet diese den Mantel nach einem Kreisumfange KL, welcher der halben Summe der Umfänge BD und FF gleich ist. Man kann daher auch sagen: der Mantel des Kegelstumpfs $BDFE$ ist dem Rechtecke aus der Seitenlinie (BE) und dem Umfange eines Kreises (LK) gleich, dessen Ebene von den Grundflächen DB und EF gleich weit absteht.

Zusatz 2. Ist l die Breite oder Seitenlänge des Mantels und sind R und r die Radien der beiden Grundflächen des abgestumpften Kegels, so ist der Mantel dieses letztern $= \pi (R + r) l$, oder wenn der Radius des Mittelkreises $OK = \varrho = \frac{1}{2} (R + r)$, der Mantel $n = 2\pi\varrho l$.

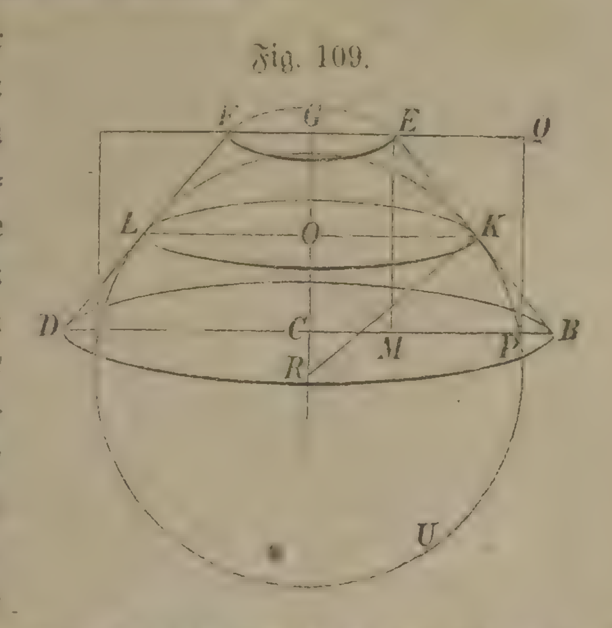
Beispiel. Für $R = \overset{cm}{6{,}54}$, $r = \overset{cm}{3{,}58}$, $l = \overset{cm}{5{,}64}$ wird $n = 179{,}302056$ □cm.

Zusatz 3. Die Aufgabe: einen dem Mantel gleichen Kreis zu finden, erledigt sich in gleicher Weise wie beim Cylinder und Kegel (37 und 40) durch Construction einer mittlern Proportionale.

43. Satz. Der Mantel eines senkrechten abgekürzten Kegels ist dem Rechtecke aus der Höhe oder Achse dieses Kegels und einer Kreisperipherie gleich, deren Radius ein in der Mitte einer Kegelseite auf dieser errichtetes und bis zur Achse verlängertes Perpendikel ist.

Beweis. Ist *DBEF* der abgekürzte Kegel, so ist nach dem vorigen Satze dessen Mantel dem Rechtecke aus *EB* und der Peripherie *LK* gleich, welche letztere gleich weit von den Grundflächen *BD* und *EF* absteht. Durch den Punkt *E* sei *EM* || der Achse *GC* gezogen und auf *EB* in der Mitte *K* und in der Ebene *EBCG* das Perpendikel errichtet, welches die Kegelachse oder deren Verlängerung in *R* treffe. Leicht ist es nun, aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *EBM* und *KRO* und aus Plan. VI., 21 abzuleiten, daß das Rechteck aus *EB* und der Peripherie *LK* dem Rechtecke aus *EM* oder *GC* und einer mit *RK* beschriebenen Peripherie *KLU* gleich ist, woraus sich der Satz als richtig ergibt.

Fig. 109.



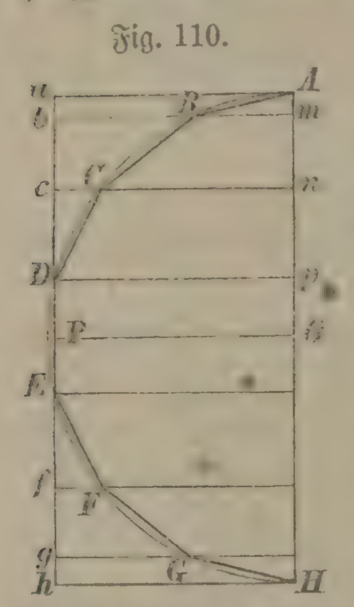
Zusatz. Der Mantel eines abgekürzten Kegels ist also auch dem eines Cylinders gleich von derselben Höhe wie der Kegel, dessen Grundfläche ein zwei gegenüber liegende Kegelseiten (*BE* und *DF*) in deren Mitte berührender Kreis ist (in obiger Figur der Kreis *LKU*). — Soll dieser Cylinder gleichzeitig mit dem Kegel durch Umdrehung um die Achse *CG* beschrieben werden, so hat man nur aus *CG* und *CP* = *KR* das Rechteck *CGQP* zu bilden, dessen Umdrehung um *CG* den in Rede stehenden Cylinder erzeugt; *PQ* beschreibt den Mantel.

Dritter Abschnitt.

Inhalt der Kugelfläche und deren Theile. Oberfläche des Ringkörpers.

44. Satz. Die Oberfläche des durch vollständige Umdrehung eines regulären Halbpolygons *) um den begrenzenden Durchmesser als Achse erzeugten Körpers ist dem Mantel eines senkrechten Cylinders gleich, der dieselbe Achse hat, und dessen Grundfläche ein mit der Apotheme des Polygons beschriebener Kreis ist.

Fig. 110.



Beweis. Das reguläre Halbpolygon sei *ABCDEFGH*. Die Seiten eines solchen: *AB*, *BC*, ... *GH*, sind alle unter einander gleich und die Ecken *B*, *C*, ... *G* liegen sämmtlich im Umfange eines über *AH* beschriebenen Halbkreises; $OP \perp DE$ oder jedes andere von *O* auf eine der Seiten gefällte Perpendikel ist die Apotheme. Construirt man nun über *AH* das Rechteck *AahH*, so daß *Aa* = der *Hh* = der Apotheme *OP* und zieht durch *B*, *C*, *D*.. die Parallelen *bm*, *cn*, ..., so folgt aus dem Zusatze zur vorigen Nr., daß bei Umdrehung der ganzen Figur um *AH* als Achse die einzelnen von den Polygonseiten *AB*, *BC*,... beschriebenen Kegelmäntel der Ordnung nach den von *ab*, *bc*, ... beschriebenen Cylindermänteln an Inhalt gleich sind, daher auch die ganze von dem Polygonumfange *ABC*...*GH* beschriebene Fläche dem von *ah* beschriebenen Cylindermantel gleich wird.

Zusatz. Betrachtet man die nur von einem Theile des Polygonumfangs, der jedoch aus zwei oder mehreren ganzen Seiten bestehen muß, etwa von *ABC* oder *BCD* bei der Umdrehung um *AH* beschriebene Fläche, so ist diese dem von resp. *ac* oder *bD* beschriebenen Cylindermantel, überhaupt dem Mantel eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche der mit der Apotheme beschriebene Kreis und dessen Höhe die Projection jenes Theils vom Polygonumfange auf die Achse *AH* ist.

*) Ein solches entsteht durch Theilung eines halben Kreisumfangs in gleiche Theile und Verbindung der Theilpunkte durch Sehnen in der Ordnung, wie sie auf einander folgen.

45. Satz. Die Oberfläche der Kugel ist so groß wie der Mantel eines umgeschriebenen Cylinders und viermal so groß als ein größter Kreis der Kugel.

Beweis. Betrachtet man den größten Kreis, der durch Umdrehung um einen seiner Durchmesser die Kugel beschreibt, als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten, so muß man folgerichtig die Kugel als einen durch vollständige Umdrehung eines regulären Halbpolygons um den begrenzenden Durchmesser als Achse entstandenen Körper ansehen, wie ein solcher in der vorigen Nr. besprochen worden. Die Apotheme dieses Polygons ist der Radius: die Grundfläche des Cylinders also, dessen Mantel nach (44) der Oberfläche des Körpers gleich kommt, hat denselben Radius, ist also einem größten Kreise der Kugel gleich; der Cylinder läßt sich daher der Kugel umschreiben; oder: die Kugel-Oberfläche ist dem Mantel eines ihr umgeschriebenen Cylinders gleich.

Aus dem Verhältnisse des Mantels zur Grundfläche des Cylinders (36, Zus. 4) folgt sogleich die zweite Behauptung, daß die Kugelfläche auch viermal so groß sei als ein größter Kreis derselben.

Zusatz 1. Die Oberfläche der Kugel ist auch einem Kreise gleich, dessen Radius der Durchmesser der Kugel ist.

Zusatz 2. Ist der Kugelradius $= r$, der Durchmesser $d = 2r$, so ist die Oberfläche $= 4\pi r^2 = \pi d^2$. Ist ferner der Umfang eines größten Kreises $= p$, so ist die Oberfläche auch $= \frac{p^2}{\pi}$.

Beispiel. Der Umfang der Erde mißt 360° zu 15 geogr. Meilen, also $p = 15 \times 360 = 5400$ Meilen; hieraus die Oberfläche $= 9281916{,}3$ □Meilen, vorausgesetzt, daß die Erde eine Kugel sei.

Zusatz 3. Dieselbe Oberfläche der Kugel beträgt $\frac{2}{3}$ der ganzen Oberfläche des umgeschriebenen Cylinders.

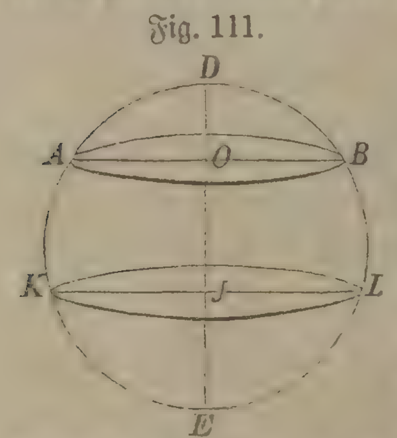
Zusatz 4. Kugelflächen verhalten sich zu einander wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser, oder der Umfänge ihrer größten Kreise.

46. Erklärungen. 1) Ein Theil der Kugelfläche, der nur von einem Kreise auf ihr begrenzt ist, wird Kugelkappe (auch Calotte) genannt, der von zwei parallelen Kreisen begrenzte: Kugelzone. Jeder Kreis auf der Kugel-Oberfläche theilt diese in zwei Kappen, die gleich oder ungleich sind, je nachdem jener Kreis ein größter oder kleiner Kreis ist. — Die Kugelzone kann immer als der Unterschied zweier Kugelkappen betrachtet werden; die Kugelkappe aber als eine Zone, bei welcher einer der begrenzenden Kreise

auf Null reducirt ist. 2) Grundfläche einer Kugelkappe ist der Kreis, von dessen Umfange sie begrenzt wird. Ein auf der Grundfläche senkrechter Durchmesser geht durch deren Mitte und endigt in deren sphärischem Mittelpunkte, welchen letztern man als die Mitte der Kappe oder als deren Scheitel ansehen kann. Der Abstand beider Mitten oder der zwischen Kappe und Grundfläche fallende Theil des senkrechten Durchmessers ist die Höhe der Kappe. Höhe einer Zone dagegen ist der senkrechte Abstand der beiden sie begrenzenden Kreisebenen. Er wird durch den zwischen diese fallenden Theil des auf ihnen senkrechten Durchmessers gemessen.

47. Satz. **Jede Kugelkappe und jede Kugelzone ist so groß wie der Mantel eines senkrechten Cylinders, dessen Grundfläche einem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe oder Achse der Höhe der Kappe gleich kommt.**

Fig. 111.



Beweis. *AB* sei die Grundfläche einer Kugelkappe und *DE* der darauf senkrechte, in *O* sie treffende Durchmesser; *DO* sei die Höhe der Kappe, *DAEB* aber ein beliebiger, durch *DE* gehender größter Kreis der Kugel. Die Kugelkappe wird durch Umdrehung des Bogens *AD* um *DE* als Achse beschrieben. Betrachtet man nun den Kreis *DAEB* als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten, so ist der Bogen *DA* ein Theil vom Umfange dieses Polygones, und die Kugelkappe folgerichtig eine durch Umdrehung dieses Theiles um *DE* erzeugte Fläche. Eine solche ist aber nach 44, Zus. dem Mantel eines Cylinders gleich, dessen Höhe *DO* und dessen Basis einem größten Kreise der Kugel gleich ist.

Eben so ist die Kugelkappe *AEB*, deren Höhe *OE* dem Mantel eines Cylinders von dieser Höhe *OE* und derselben Basis wie vorher gleich, und aus gleichen Gründen die zwischen den Parallelkreisen *AB* und *KL* begriffene Zone einem Cylindermantel von der Höhe *OJ* und derselben Basis gleich.

Zusatz 1. Ist r der Radius der Kugel, h die Höhe einer Kugelkappe oder Zone, so ist deren Inhalt $= 2\pi rh$.

Zusatz 2. Zwei Kappen oder Zonen auf derselben Kugel oder auf gleichen Kugeln verhalten sich wie die Höhen derselben, und jede einzelne Kappe oder Zone verhält sich zur ganzen Kugel-Oberfläche wie die Höhe derselben zum Durchmesser.

Beispiel. Nimmt man den Abstand der Wendekreise vom Aequator der Erdkugel zu 23° 27½′ an und theilt den Radius derselben in 1000 gleiche Theile, so hat die Höhe der halben heißen Zone nahe 398 dieser Theile, die einer gemäßigten 519⅓, die einer kalten nahe 82⅔; wie groß wäre hiernach der Flächeninhalt jeder Zone in Quadratmeilen? (S. 45, Zus. 2.)

48. Satz. Die Kugelkappe ist auch einem Kreise an Inhalt gleich, dessen Radius der gerade Abstand des Scheitels vom Umfange der Grundfläche ist.

Der Beweis ist auf 47 und Planim. V., 51 nebst VI., 21 zu gründen. Als leicht wird derselbe eigener Auffindung überlassen.

49. Satz. Jede Kugelkappe verhält sich zu ihrer Basis oder Grundfläche wie der Durchmesser der Kugel zum Ueberschusse desselben über die Höhe.

Der Beweis ist auf den vorhergehenden Satz und auf Plan. V., 51 nebst VI., 22 zu gründen und wird gleichfalls der Selbstübung anheimgestellt.

50. Aufgaben: 1) Die Kugel-Oberfläche mittels eines Kreises auf ihr in zwei Kappen zu theilen, deren Inhalt in gegebenem Verhältnisse steht. 2) Eine Kugelkappe zu machen, die zu ihrer Grundfläche in gegebenem Verhältnisse steht.

51. Satz. Dreht sich ein reguläres Polygon von gerader Seitenzahl um eine in seiner Ebene aber ganz außer ihm liegende und einem seiner Durchmesser parallele Achse, so daß der Abstand jedes Punktes von der Achse dabei unverändert bleibt, so beschreibt dasselbe bei vollständiger Umdrehung einen ringförmigen Körper, dessen Oberfläche so groß wie die Seitenfläche (oder Mantel nach Analogie des Cylinders) eines senkrechten Prisma ist, wenn dieses das Polygon zur Basis und eine Höhe hat, welche der vom Mittelpunkt des Polygons beschriebenen Kreisperipherie an Länge gleichkommt.

Beweis. $ABD..F..B'A$ (Fig. 112) sei das Polygon, C sein Centrum, XY die dem Durchmesser AF parallele Achse. Bei der Umdrehung um diese Achse beschreiben die Seiten des Polygones sämmtlich Mäntel abgekürzter Kegel, deren Achsen Theile von XY sind. Der von AB beschriebene Mantel ist (wenn K die Mitte von AB und KP das von K auf die Achse gefällte Loth bezeichnet), nach 42, Zus. 1 so groß als ein aus AB und der Länge der von K um die Achse beschriebenen Peripherie gebildetes Rechteck. Aehnliches gilt von dem durch die entsprechende Polygonseite AB' beschriebenen

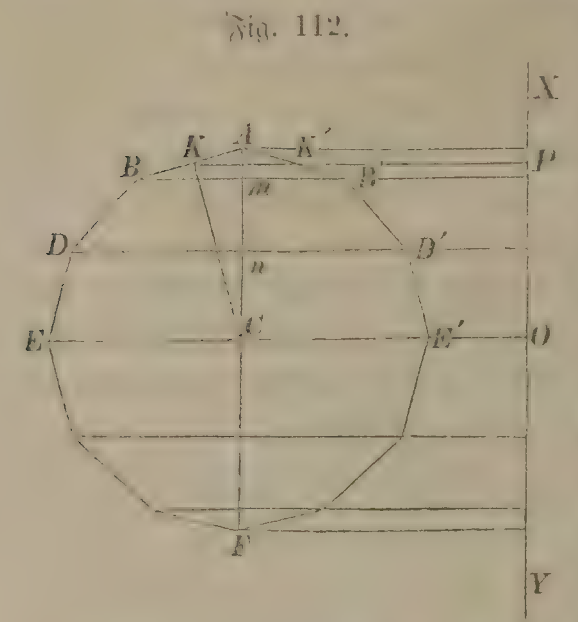


Fig. 112.

Mantel; derselbe ist so groß als das aus AB' und der von K' (Mitte von AB') um die Achse beschriebenen Peripherie. Da nun $KP + K'P = 2CO$, d. i. dem doppelten Abstande des Mittelpunktes C von der Achse, so ist auch die Summe jener beiden Peripherieen dem Doppelten der von C um die Achse beschriebenen Peripherie gleich und daher die Summe der von AB und AB' beschriebenen Flächen so groß wie das Rechteck aus BA und jener doppelten Peripherie oder so groß wie das Rechteck aus $BA + AB'$ und dieser von C um O beschriebenen Peripherie selbst. Auf ganz gleiche Weise wird gezeigt, daß die Summe der von den Seiten BD und $B'D'$ beschriebenen Kegelmäntel dem Rechtecke aus $BD + B'D'$ und der nämlichen, von C beschriebenen Kreisperipherie an Inhalt gleich kommt u. s. w. Hieraus folgt alsbald die im Satze ausgesprochene Behauptung.

52. **Satz. Die vom halben Polygon-Umfange $ABDE..F$ beschriebene Fläche übertrifft die von der andern, der Achse nähern Hälfte, $AB'D'E'..F$ beschriebene um das Doppelte eines Cylindermantels, dessen Höhe der Durchmesser AF und dessen Grundfläche ein mit der Apotheme CK beschriebener Kreis ist.**

Beweis. Aus dem was zu Anfang des vorhergehenden Beweises von den durch AB und AB' bei der Umdrehung beschriebenen Flächen gesagt worden, folgt, daß der Unterschied dieser Flächen dem Mantel eines Cylinders gleich sei, dessen Höhe AB ist, und dessen Grundfläche BB' zum Durchmesser hat; dieser Mantel ist aber, wie sich leicht zeigen läßt, dem doppelten Mantel eines anderen Cylinders gleich, dessen Höhe Am (m Durchschnittspunkt von BB' und AF) und dessen Grundfläche ein mit der Apotheme CK beschriebener Kreis ist. Eben so ergibt sich, daß der Unterschied der von BD und $B'D'$ beschriebenen Flächen dem Doppelten eines Cylindermantels von der Höhe mn und derselben Grundfläche gleich ist u. s. w. Aus der Vereinigung dieser Unterschiede folgt der im Satze angegebene Gesammt-Unterschied.

53. Erklärung. Dreht ein Kreis sich um eine in seiner Ebene aber ganz außer ihm liegende gerade Linie als Achse vollständig um, so daß die Entfernung der Punkte des Kreises von der Achse dabei unverändert bleibt, so ist der von ihm beschriebene Körper ein Ring im geometrischen Sinne. Die vom Umfange des Kreises (Grundkreis) beschriebene Fläche ist die Oberfläche dieses Ringes, welche durch die von den Endpunkten eines der Achse parallelen Durchmessers bei derselben Umdrehung beschriebenen zwei Kreisperipherieen in eine äußere von der Achse entferntere und eine innere der Achse nähere Seite getheilt wird. Die vom Mittelpunkte des Grundkreises bei der Umdrehung beschriebene Peripherie enthält die Mittelpunkte sämmtlicher (dem Grundkreise gleichen) senkrechten Querschnitte und bildet die Länge des Ringes.

54. Satz. Die Oberfläche eines Ringes ist so groß wie der Mantel eines senkrechten Cylinders, dessen Grundfläche der den Ring beschreibende Kreis (Querschnitt des Ringes), und dessen Höhe der Länge des Ringes gleich ist.

Den Beweis wird man gleich aus 51 ableiten, wenn man den beschreibenden Grundkreis als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten betrachtet.

Zusatz. Der Radius des Grundkreises (die halbe Dicke des Ringes) sei $= r$, der Abstand seines Mittelpunktes von der Achse $= a$, alsdann ist die Oberfläche des Ringes $= 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 ar$.

55. Satz. Die äußere Seite der Oberfläche eines Ringes übertrifft die innere um die doppelte Oberfläche einer Kugel, deren Radius der des Grundkreises ist.

Auch diesen Satz wird man sofort aus 52 abzuleiten im Stande sein, wenn man die bei der vorigen Nummer erwähnte Vorstellung des Kreises als Polygones zum Grunde legt und dabei 45 berücksichtigt.

Zusatz. Bei denselben Bezeichnungen wie im Zusatz der vorigen Nummer findet sich durch Combination dieses Satzes mit dem vorhergehenden:

die äußere Seite der Ringfläche $= 2\pi r\,(\pi a + 2r)$;
" innere " " " $= 2\pi r\,(\pi a - 2r)$.

Beispiel. Aus $r = \overset{\text{cm}}{3,71}$, $a = \overset{\text{cm}}{127,35}$, erhält man 1) die äußere und innere Seite der Ringfläche 9499,1192 und 9153,1897 □cm, die ganze Ringfläche 18652,3089 □cm.

V. Capitel.

Vom körperlichen Inhalte der Polyeder.

Erster Abschnitt.

Inhalt des Prisma.

Fig. 113.

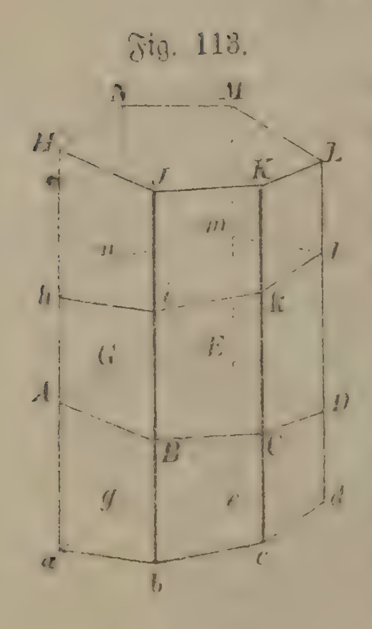
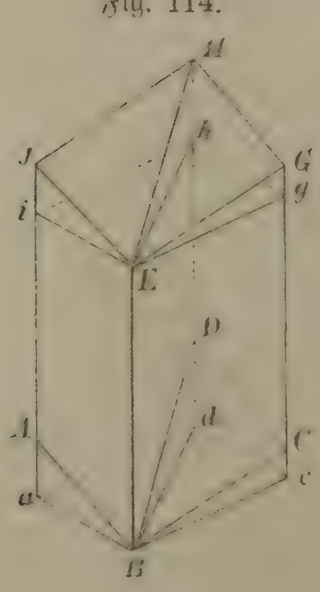


Fig. 114.



1. Satz. Werden die gehörig erweiterten Seitenflächen eines beliebigen Prisma von zwei Parallelebenen so durchschnitten, daß die Seitenkanten des zweiten dadurch entstehenden Prisma denen des erstern gleich sind, so sind beide Prismen an Inhalt gleich.

Beweis. *ACEHKM* sei ein Prisma, dessen erweiterte Seitenflächen durch zwei parallele Ebenen *ace* und *hkm* so geschnitten werden, daß $HA = ha$ ist, alsdann wird $ACEHKM = acehkm$. Leicht läßt sich nämlich durch Deckung beweisen, daß der Körper *aceACE* dem Körper *hkmHKM* congruent, also auch an Inhalt gleich sei, woraus alsdann unmittelbar die Richtigkeit der obigen Behauptung erhellt.

2. Satz. Jedes Parallelepiped wird durch eine Diagonalebene in zwei dreiseitige Prismen von gleichem Körperinhalte getheilt.

Beweis. Es sei *ABCDEGHJ* ein beliebiges Parallelepiped und durch die Diagonalebene *BDHE* in zwei dreiseitige Prismen getheilt.

Ist das Parallelepiped ein rechtwinkeliges, so können beide rechtwinkeligen dreiseitigen Prismen leicht zur Deckung gebracht werden, sie sind also an Inhalt gleich. Ist das Parallelepiped kein rechtwinkeliges, so lege man durch die Endpunkte

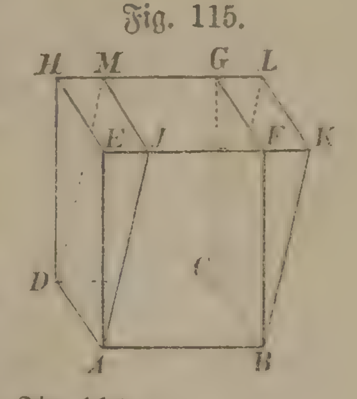
B und E der Kante BE zwei Ebenen $Badc$ und $Eihg$ senkrecht auf BE. Das von diesen Ebenen und den erweiterten Seitenflächen gebildete Parallelepiped $aBcdiEgh$ ist ein rechtwinkeliges und wird durch die Ebene $hEBd$ in zwei senkrechte dreiseitige und daher auch gleiche Prismen zerlegt. Nach dem vorhergehenden Satze 1 ist aber $aBdiEh = ABDJEH$ und $BcdEgh = BCDEGH$; folglich ist auch $ABDEJH = BCDEGH$.

Zusatz. Jedes dreiseitige Prisma ist also die Hälfte eines Parallelepipeds, welches mit dem Prisma drei gemeinschaftliche Seitenkanten hat.

3. Satz. Zwei Parallelepipeden auf derselben Grundfläche, oder auf congruenten Grundflächen, von gleichen Höhen haben gleichen körperlichen Inhalt.

Beweis. Die gemeinschaftliche Grundfläche beider Parallelepipeden sei $ABCD$. Da die Höhen gleich sind, so müssen die beiden anderen Grundflächen in derselben, mit der Grundfläche parallelen, Ebene liegen. Es treten nun zwei Fälle ein, je nachdem zwei der Seitenflächen in einer Ebene liegen oder nicht.

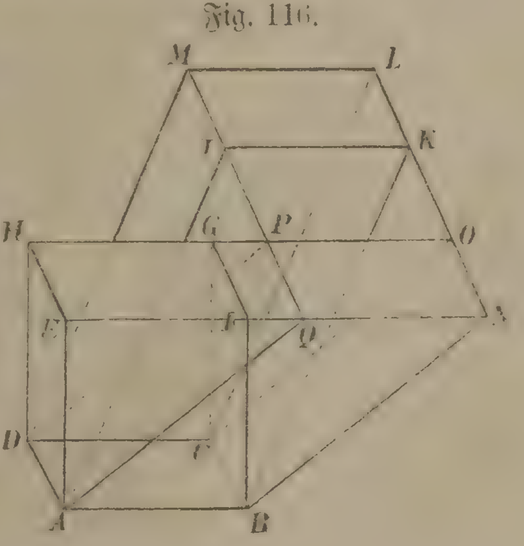
Fig. 115.



1. Fall. Die Seitenflächen AF, AK mögen in einer Ebene liegen, mithin auch die ihnen gegenüber stehenden Seitenflächen DG und DL in einer Ebene. Nach Satz 1 ist $ABCDEFGH = ABCDJKLM$.

2. Fall. Liegen die Seitenflächen nicht in einerlei Ebene, also auch EG, JL nicht zwischen denselben Parallelen, so verlängere man EF, HG, MJ, LK nöthigenfalls bis zur Bildung eines neuen Parallelogramms $NOPQ$ zwischen diesen Linien und verbinde Q, N, O, P mit A, B, C, D, so ist, wie sogleich erhellet, $ABCDPQNO$ ein drittes Parallelepiped, welches sich mit jedem der beiden vorhergehenden im ersten Falle befindet. Es ist daher Parallelepiped AG = Parallelepiped AO = Parallelepiped AL, mithin $AG = AL$.

Fig. 116.



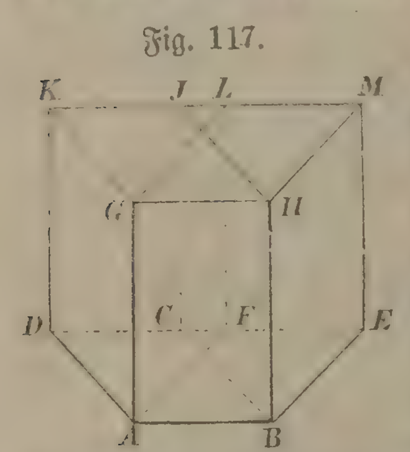
4. Satz. **Zwei beliebige Prismen auf derselben Grundfläche und von gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.**

1. Fall. Die Prismen sind dreiseitig. Man ergänze die gemeinschaftliche dreiseitige Grundfläche der Prismen zu einem Parallelogramm, die Prismen zu Parallelepipeden. Der Beweis des Satzes ergibt sich dann leicht durch Anwendung von Satz 2 und Satz 3.

2. Fall. Die Prismen sind mehrseitig. Durch Zerlegung der Prismen mittels Diagonalebenen in dreiseitige Prismen ergibt sich der Beweis auf der Stelle, wenn man sich dabei auf den ersten Fall stützt.

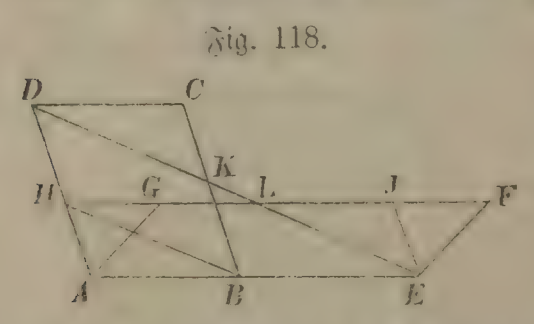
5. Satz. **Zwei Parallelepipeden von gleicher Höhe und gleich großen, wenn auch nicht congruenten, Grundflächen haben gleichen Inhalt.**

Fig. 117.



1. Fall. Haben die Grundflächen $ABCD$ und $ABEF$ eine gleiche Seite AB, so müssen die dieser gegenüber liegenden Seiten DC und FE in einer geraden Linie liegen. Hat dabei das eine Parallelepiped AJ mit dem andern AM eine gemeinschaftliche Seitenfläche $ABHG$, so ergibt sich, indem diese als Grundfläche betrachtet wird, die Behauptung sogleich aus Satz 3. Hat das zweite Parallelepiped mit dem ersten keine gemeinschaftliche Seitenfläche, so läßt sich ein drittes Parallelepiped construiren, welches mit dem zweiten die Grundfläche, mit dem ersten die Seitenfläche gemeinschaftlich hat, u. s. w.

Fig. 118.



2. Fall. Wenn die Grundflächen keine gleichen Seiten haben. Sie seien dann $ABCD$ und $AEFG$. Verlängert man GF bis sie AD in H trifft und zieht $EJ \parallel AH$, so ist das Parallelogramm $AEJH$ = Parallelogramm $AEFG$ und nach dem ersten Falle ist auch das Parallelepiped über $AEJH$ gleich dem Parallelepiped über $AEFG$. Leicht ergibt sich aus den Eigenschaften der Figur, daß $HB \parallel DE$ ist. Nun besteht das Parallelepiped über $ABCD$ aus dem dreiseitigen Prisma über AHB, dem Parallelepiped über $HBKD$ und dem Prisma über DCK; das andere Parallelepiped über $AEJH$ aus demselben dreiseitigen Prisma über AHB, dem Parallelepiped über $HBEL$ und dem

dreiseitigen Prisma über LEJ, alle von gleicher Höhe. Die Parallelepipeden über $HBKD$ und $HBEL$ befinden sich aber im 1. Falle des Satzes; die dreiseitigen Prismen über DKC und LEJ sind gleich (S. 5), folglich ist auch das ganze Parallelepiped über $ABCD$ dem über $AEJH$, folglich auch dem über $AEFG$ gleich.

1. Beweis. Ein zweiter Beweis ergibt sich leicht dadurch, daß man die Grundflächen so an einander legt, daß sie die Ergänzungen eines Parallelogramms werden (Planim. IV., 14).

6. Aufgabe. **Ein n-seitiges Prisma in ein $n-1$-seitiges zu verwandeln.**

Die Construction ist ähnlich der in IV., 19 der Planimetrie für Polygone ausgeführten.

Zusatz. Ein n-seitiges Prisma in ein dreiseitiges Prisma oder in ein Parallelepiped zu verwandeln.

7. Satz. **Prismen von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche haben gleichen Inhalt.**

Beweis. Denkt man sich jedes der Prismen in ein ihm gleiches dreiseitiges verwandelt, so sind nach 4 (1. Fall) die letzteren Prismen einander gleich, somit auch die ersteren.

8. Aufgabe. Ein jedes Prisma in ein rechtwinkeliges Parallelepiped von gleicher Höhe zu verwandeln. Leicht.

9. Satz. **Prismen von gleicher Grundfläche verhalten sich, wie ihre Höhen, Prismen von gleicher Höhe, wie ihre Grundflächen. Im Allgemeinen stehen Prismen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und ihrer Höhen.**

Beweis. Es mögen die beiden Prismen Ada und Hkh (Fig. 119) gleiche Grundflächen AD und Hk haben, ihre Höhen seien em und gn. Sind die Höhen commensurabel und stehen im Verhältnisse der ganzen Zahlen p und q, so läßt sich durch eine leichte Construction das Prisma Ada in p Prismen, das Prisma HKh in q Prismen zerlegen, die sämmtlich unter einander gleich sind. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich somit auf der Stelle. Sind die Höhen nicht commensurabel, so läßt sich der Beweis ganz in derselben Weise führen, wie er bei dem entsprechenden Satze in Plan. V., 80 geführt worden ist.

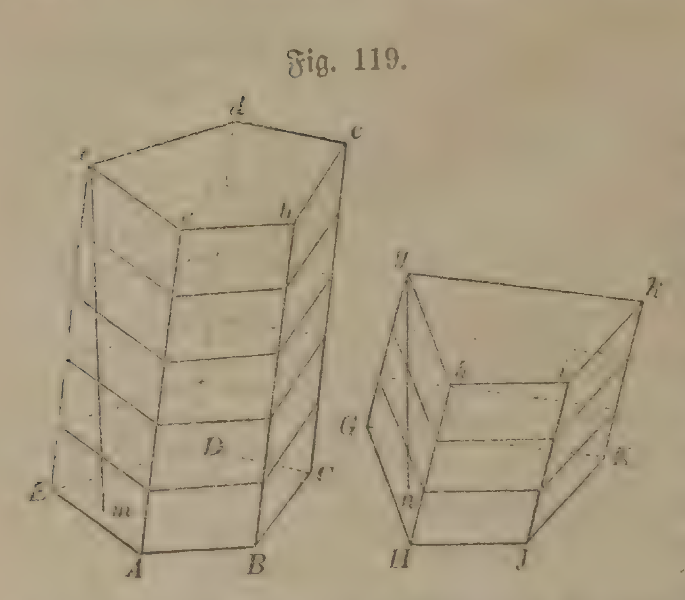


Fig. 119.

Haben die Prismen P und Q gleiche Höhen, so läßt sich der Beweis, daß sie sich wie ihre Grundflächen $G : g$ verhalten, auf den vorhergehenden Satz stützen, wenn man die Grundflächen G und g zuerst in Rechtecke $p \cdot n$ und $q \cdot n$ von gemeinschaftlicher Höhe n verwandelt denkt. Die beiden gegebenen Prismen P und Q sind alsdann rechtwinkeligen Parallelepipeden gleich, die eine gemeinschaftliche Höhe h haben und deren Grundflächen bezüglich $p \cdot n$ und $q \cdot n$ sind. Die letzteren Prismen können aber offenbar auch als Parallelepipeden betrachtet werden, welche bei einerlei Grundfläche $h \cdot n$ die zugehörigen Höhen p und q haben. Es ist somit $P : Q = p : q$ und da $p : q = G : g$, so ist $P : Q = G : g$.

Es seien 3) die beiden Prismen P und Q, ihre Grundflächen G und g, ihre Höhen H und h. Man denke sich ein drittes Prisma M von gleicher Grundfläche mit dem Prisma P und von gleicher Höhe mit dem Prisma Q, alsdann ist:

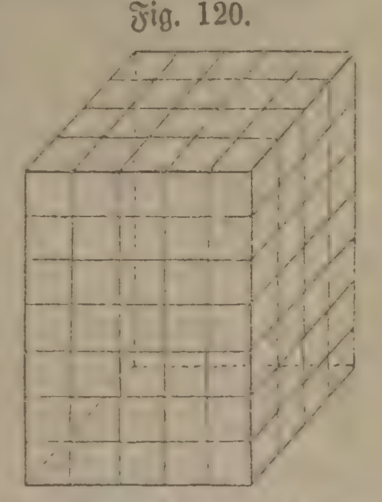
$$\begin{array}{l} P : M = H : h \\ M : Q = G : g; \\ \hline P : Q = \begin{cases} H : h \\ G : g. \end{cases} \end{array} \quad \text{mithin}$$

Zusatz. Zwei Prismen sind gleich, wenn sich die Grundflächen umgekehrt verhalten wie die Höhen, und umgekehrt: Sind zwei Prismen einander gleich, so verhalten sich ihre Grundflächen umgekehrt wie ihre Höhen.

10. Ausmessung des Prisma. Bei der Inhaltsbestimmung der Prismen und der Körper überhaupt kommt es darauf an, das Verhältniß anzugeben, in welchem der Raum eines solchen Körpers zu irgend einer gegebenen, als bekannt angenommenen Raumeinheit steht. Als Raumeinheit wird am zweckmäßigsten nach allgemeinem Gebrauche ein Würfel oder Cubus genommen, dessen Seitenkante der Längeneinheit gleich ist.

Dieses vorausgesetzt ist: 1) Der Inhalt des rechtwinkeligen Parallelepipedes dem Producte der drei Zahlen gleich, welche die Längen dreier zusammenstoßenden Kanten, nach einer gemeinschaftlichen Längeneinheit gemessen, angeben, oder kürzer: Der Inhalt eines Parallelepipedes ist dem Producte aus Länge, Breite und Höhe desselben, oder auch dem Producte aus der Grundfläche und Höhe gleich. Enthält z. B. die Höhe 7, eine Seite der Grundfläche 5, die andere 4mal die Längeneinheit, so läßt sich, wie beistehende Figur erkennen läßt, durch Parallelebenen mit den Seitenflächen leicht nachweisen, daß das ganze Parallelepiped sich in $7 \cdot 5 \cdot 4 = 140$ Würfel theilen läßt. Sind die Seitenlängen Bruchzahlen, so kann für diesen Fall der Beweis in ähnlicher Weise, wie es in Planim. IV., 3 geschehen ist, durch Bildung von Brucheinheiten geführt werden. 2) Da sich (8) jedes Prisma in ein rechtwinkeliges Parallelepiped verwandeln läßt, das mit ihm gleiche Höhe und daher auch gleich große Grundfläche hat, so ist auch nach 1) der Inhalt eines jeden Prisma dem Producte aus Grundfläche und Höhe gleich.

Fig. 120.



Bemerkung. Der Inhalt eines Würfels ist nach 1) die dritte Potenz seiner Seite, weßhalb man auch die dritte Potenz einer Zahl „Würfel- oder Cubikzahl" nennt. Schreiten die Unterabtheilungen des Längenmaßes zehntheilig fort, so schreiten die Unterabtheilungen des Körpermaßes tausendtheilig fort. Z. B. 1 Meter = 10 Decimeter, 1 Decimeter = 10 Centimeter; 1 Cubikmeter = 1000 Cubikdecimeter, 1 Cubikdecimeter = 1000 Cubikcentimeter. Wird aber die Haupteinheit zwölftheilig abgestuft, so hat jede Körpereinheit $12^3 = 1728$ nächste Unterabtheilungen. Z. B. 1 Fuß = 12 Zoll, 1 Zoll = 12 Linien, 1 Cubikfuß = 1728 Cubikzoll, 1 Cubikzoll = 1728 Cubiklinien.

11. Satz. Aehnliche Prismen verhalten sich wie die Cuben ihrer homologen Kanten, ihre Oberflächen wie die Quadrate dieser Kanten.

Beweis. Die Prismen seien P und Q, ihre Grundflächen A und B, ihre Höhen p und q, zwei homologe Kanten a und b. Man

denke sich ein drittes Prisma M mit der Grundfläche A und der Höhe q, dann ist

$$P : M = p : q = a : b = a^3 : a^2b$$
$$M : Q = A : B = a^2 : b^2 = a^2b : b^3$$
$$\text{mithin } P : Q = a^3 : b^3. \text{ (Planim. V., 31.)}$$

Die Ausdrücke a^3 und b^3 können hier eben so wohl die geometrischen Würfel, als auch die Zahlen bezeichnen, welche deren Inhalt angeben; eben so verhält es sich mit a^2b.

Was die Oberflächen betrifft, so sind diese Summen von ähnlichen Figuren und verhalten sich also wie zwei entsprechende unter diesen, d. i. nach Planim. V., 83, wie die Quadrate zweier homologen Seiten.

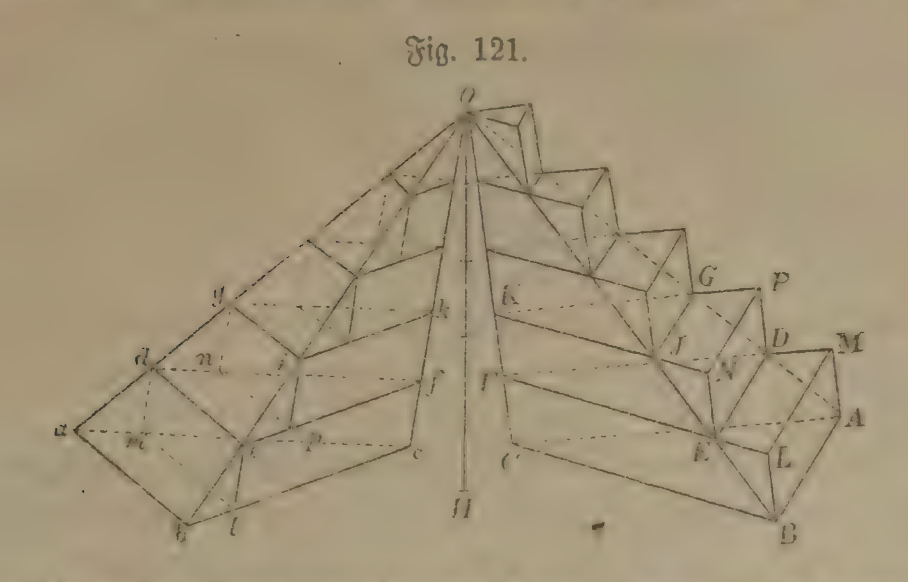
Zweiter Abschnitt.

Inhalt der Pyramiden und Polyeder überhaupt.

12. Satz. Drei- oder mehrseitige Pyramiden von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche haben gleichen Körperinhalt.

Die beiden gegebenen Pyramiden $abcO$ und $ABCO$ (Fig. 121) können, da sie gleiche Höhe haben, so an einander gelegt werden, daß ihre gleichen Grundflächen ABC und abc in eine Ebene zu liegen kommen und ihre Spitzen zusammenstoßen. Wären diese Pyramiden nun nicht gleich, so wäre eine derselben, etwa $OABC$, die größere, die andere $Oabc$ die kleinere. Man theile nun die gemeinschaftliche Höhe OH beider Pyramiden in n (an der Figur in 5) gleiche Theile und führe durch die Theilpunkte Ebenen parallel mit den Grundflächen ABC und abc. Die Durchschnitte dieser Ebenen mit den Seitenflächen beider Pyramiden bilden die den Grundflächen ähnlichen Durchschnitte DEF, GJK ... in der einen, def, gik ... in der anderen, und je zwei dieser Durchschnitte sind, wie sich leicht aus I., 80 in Verbindung mit der Voraussetzung, daß $ABC = abc$ sei, ergibt, der Ordnung nach, paarweise einander an Inhalt gleich, so daß $DEF = def$, $GJK = gik$ ..... Man bilde ferner an jeder der beiden Pyramiden eine Reihe dreiseitiger Prismen, nämlich an der Pyramide $OABC$ die n äußern $ABCFML$,

Fig. 121.



DEFKPN u. s. w., deren Seitenkanten alle parallel mit *OC*; an der anderen Pyramide *Oabc* die $(n-1)$ inneren *defclm*, *gikfpn* u. s. w., deren Seitenkanten alle parallel *Oc*. Alle diese Prismen haben gleiche Höhen, nämlich den *n*-ten Theil von *OH*, und jedes der inneren Prismen in der Pyramide *Oabc* ist dem zunächst höher liegenden äußeren in der anderen Pyramide *OABC* an Inhalt gleich (Satz 7). Bezeichnet man nun zur Abkürzung die *n* äußeren Prismen an der Pyramide *OABC* in der Ordnung, wie sie von der Grundfläche an gegen die Spitze folgen, der Reihe nach durch *A, B, C, D, E ... N,* so sind die $n - 1$ inneren an der Pyramide *Oabc* liegenden Prismen bezüglich *B, C, D, E ... N.* Der Unterschied zwischen der Summe *S* der äußeren und der Summe Σ der inneren Prismen ist daher $= A$ d. i. dem ersten äußeren Prisma *ABCFML*; $S - \Sigma = A$. Gesetzt nun, es wäre im Inhalte der beiden Pyramiden ein Unterschied, etwa $OABC - Oabc = \triangle$. Diesen Unterschied kann man immer als ein Prisma von einer Grundfläche $= ABC$ oder *abc* und einer Höhe *x* denken. So klein dann auch *x* sein möge, so kann doch immer die Höhe *OH* in so viele Theile getheilt werden, oder die obige Zahl *n* so groß genommen werden, daß jeder Theil der *OH* kleiner als *x* wird. Es wird somit das unterste äußere Prisma *A*, d. i. der Unterschied $S - \Sigma < \triangle$. Andererseits ist aber $S > OABC > Oabc > \Sigma$ und somit $S - \Sigma > OABC - Oabc$, also auch $S - \Sigma > \triangle$, welches mit $S - \Sigma < \triangle$ im Widerspruche steht. Der angenommene Unterschied $\triangle$ zwischen den Pyramiden ist also unmöglich, die Pyramiden sind daher einander gleich. Für mehrseitige Pyramiden läßt sich der Satz ganz in derselben Weise, wie für dreiseitige Pyramiden, beweisen, wofern statt der dreiseitigen Prismen die mehrseitigen angewandt werden.

13. **Satz.** **Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von derselben Grundfläche und von gleicher Höhe.**

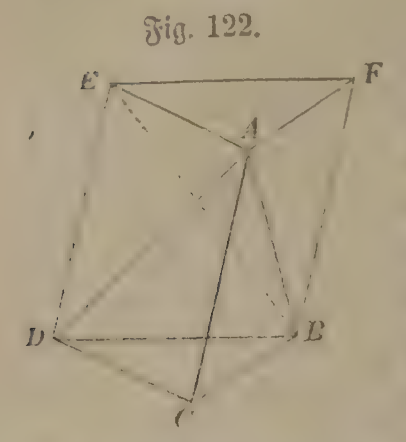


Fig. 122.

Beweis. Es sei 1) die Pyramide eine dreiseitige *ABCD*, *A* ihr Scheitel, *BCD* ihre Grundfläche. Errichtet man nun über *BCD* das dreiseitige Prisma *BCDEFA*, dessen Seitenkante *AC* beiden Körpern gemeinschaftlich ist, so hat dieses Prisma dieselbe Höhe, wie die Pyramide. Zieht man *EB*, so theilen *ADB* und *AEB* das Prisma *BCDEFA* offenbar in die drei dreiseitigen Pyramiden *ABCD*, *BAEF* und *AEDB*, von welchen sich leicht nachweisen läßt, daß die erste der zweiten, die zweite der dritten an Inhalt gleich ist (12). Alle drei Pyramiden sind somit gleich groß, die gegebene *ABCD* ist also $\frac{1}{3}$ des Prisma's *BCDEFA*, welches mit ihm dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat. Ist 2) die Pyramide mehrseitig, so läßt sich der Beweis leicht dadurch führen, daß man durch Diagonalebenen sowohl die mehrseitige Pyramide in dreiseitige Pyramiden, als das entsprechende mehrseitige Prisma in dreiseitige Prismen zerlegt und das für den ersten Fall Bewiesene in Anwendung bringt.

14. **Satz.** **Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundflächen, Pyramiden von gleicher Grundfläche verhalten sich wie die Höhen. Pyramiden überhaupt stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.**

Der Beweis stützt sich auf die Sätze 13 und 9.

15. **Satz.** **Aehnliche Pyramiden stehen im dreifachen Verhältnisse, oder im Verhältnisse der Cuben ihrer homologen Kanten oder Höhen.**

Der Beweis ist entweder ganz wie der in (11) für das Prisma gegebene zu führen, oder direct auf diesen zu stützen.

16. **Satz.** **Der Inhalt einer jeden Pyramide ist einem Drittel des Productes aus ihrer Grundfläche und Höhe gleich.**

Der Beweis ist auf 13 und 10 zu stützen.

17. **Satz.** **Symmetrische Polyeder haben gleichen Inhalt.**

Beweis. Sind die Polyeder dreiseitige Pyramiden, so läßt sich eine jede derselben zu einem dreiseitigen Prisma ergänzen, von welchem die Pyramide der dritte Theil ist. Die beiden symmetrischen dreiseitigen Prismen lassen sich (III., 31) mit zweien ihrer congruenten Seitenflächen so an einander legen, daß sie vereint ein Parallelepiped bilden, welches durch die gemeinschaftliche Seitenfläche als Diagonalebene nach Satz 2 halbirt wird. Aus der Gleichheit der beiden dreiseitigen Prismen ergibt sich sofort die Gleichheit der dreiseitigen Pyramiden. Je zwei beliebige symmetrische Polveder lassen sich aber nach III., 28 in eine gleiche Anzahl symmetrischer Pyramiden zerlegen, sind also mit Rücksicht auf den eben behandelten Fall an Inhalt einander gleich.

18. **Satz.** **Jedes Polyeder läßt sich in eine ihm gleiche Pyramide und auch in ein ihm gleiches Parallelepiped verwandeln.**

Der Satz gründet sich auf die Möglichkeit, jedes Polyeder in Pyramiden zu zerlegen, und diese in andere Pyramiden zu verwandeln.

19. **Satz.** **Aehnliche Polyeder verhalten sich wie die Cuben zweier homologen Seitenkanten, ihre Oberflächen wie die Quadrate derselben.**

Beweis wie bei ähnlichen Prismen.

Dritter Abschnitt.

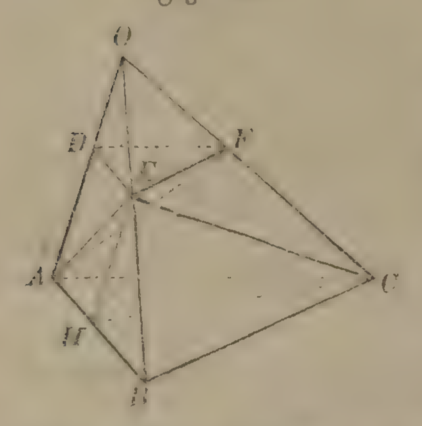
Die abgestumpfte Pyramide, das abgeschnittene Prisma und der Obelisk.

20. **Satz.** **Eine abgestumpfte Pyramide ist der Summe dreier Pyramiden gleich, welche dieselbe Höhe haben, wie die abgestumpfte, und deren Grundflächen die beiden der abgestumpften Pyramide und die mittlere Proportionale aus beiden sind.**

Beweis. 1. Fall. Die abgestumpfte Pyramide sei eine dreiseitige. $OABC$ (Fig. 123) sei eine ganze dreiseitige Pyramide, parallel mit der Grundfläche ABC derselben sei der Schnitt DEF gelegt, $ABCDEF$ wird alsdann die abgestumpfte Pyramide sein (III., 4). Die Höhe, d. h. der

Abstand der beiden parallelen Grundflächen heiße h. Man ziehe EA, EC, AF und denke sich 1) durch AE und AF, 2) durch EA und EC Ebenen gelegt. Hierdurch wird die abgestumpfte Pyramide $BCADEF$ in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt, nämlich 1) in die Pyramide $ADEF$, 2) in die Pyramide $EABC$ und 3) in die Pyramide $EACF$.

Fig. 123.



Die erste hat die Grundfläche DEF, die zweite die Grundfläche ABC, beide haben die Höhe h mit der abgestumpften Pyramide gemeinschaftlich. Zieht man $EH \parallel DA$, so ist EH auch der Ebene $ADFC$ parallel (I., 12), die von E und H auf $ADFC$ gefällten Senkrechten sind also einander gleich. Verbindet man nun noch H mit F und mit C und legt durch EH und HF eine Ebene, so wird die oben genannte dritte Pyramide $EACF$, wenn ACF als Grundfläche derselben betrachtet wird, an Inhalt der Pyramide $HACF$, welche mit ihr dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat, gleich. Diese letztere Pyramide $HACF$ kann aber auch so betrachtet werden, daß F ihre Spitze, HAC ihre Grundfläche ist, und sie hat dann dieselbe Höhe, wie die beiden ersten Pyramiden $EABC$ und $ADEF$, oder wie die abgestumpfte Pyramide. Es bleibt also nur zu beweisen übrig, daß ihre Grundfläche AHC die mittlere Proportionale zwischen den Grundflächen ABC und DEF ist. Es ist aber

$\triangle ABC : \triangle AHC = AB : AH = AB : DE$

$\triangle AHC : \triangle DEF = AH \cdot AC : ED \cdot DF = AC : DF$ (Plan. V., 81),

da nun $AB : DE = AC : DF$, so ist

$$\triangle ABC : \triangle AHC = \triangle AHC : \triangle DEF.$$

Der Satz ist somit bewiesen.

Ist 2) die abgestumpfte Pyramide keine dreiseitige, so ergibt sich für sie derselbe Satz, wenn man sie mit einer dreiseitigen vergleicht, welche mit ihr gleiche Höhe und gleiche Grundflächen hat.

1. Zusatz. Die dritte der genannten Pyramiden selbst ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden ersten Pyramiden. Es läßt sich dieses auch direct an der Figur zeigen. Denn

Pyr. $AEBC$: Pyr. $AEFC = \triangle BEC : \triangle EFC = BC : EF$ (S. 14).

Pyr. $AEFC$: Pyr. $AEFD = \triangle AFC : \triangle AFD = AC : DF$.

Da aber $BC : EF = AC : DF$, so ist:

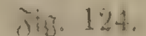
Pyr. $AEBC$: Pyr. $AEFC$ = Pyr. $AEFC$: Pyr. $AEFD$.

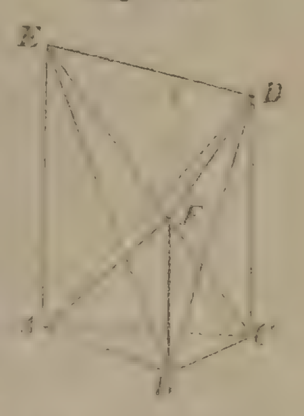
2. **Zusatz.** Bezeichnet G den Inhalt der einen, g den der anderen Grundfläche, so ist der Inhalt J der abgestumpften Pyramide:

$$J = \tfrac{1}{3} h \, (G + g + \sqrt{G \cdot g}).$$

Beispiel. Die Grundlinie AB des Dreieckes ABC sei $= 7{,}91^{m}$, die zugehörige Höhe $= 4{,}41^{m}$, die Grundlinie DE des Dreieckes DEF sei $= 5{,}65^{m}$, die Höhe h der abgestumpften Pyramide sei $= 8{,}46^{m}$. $J = 109{,}411911$ Cub.-Met.

21. Satz. Ein nicht parallel mit der Grundfläche abgeschnittenes dreiseitiges Prisma (prismatischer Stumpf) ist der Summe dreier Pyramiden gleich, welche dieselbe Grundfläche haben, wie das Prisma, und deren Scheitel in den Ecken des Schnittes liegen.


Fig. 124.



Beweis. Das abgeschnittene dreiseitige Prisma sei $ABCDEF$; ABC sei die Grundfläche. Der Körper wird der Summe dreier Pyramiden gleich sein, deren gemeinschaftliche Grundfläche ABC ist und deren Scheitel in D, E und F liegen. Denn zieht man FA und FC, so besteht der Körper $ABCDEF$ offenbar aus der dreiseitigen Pyramide $FABC$, welche mit dem dreiseitigen Prisma die Grundfläche ABC gemeinschaftlich hat und deren Spitze in der Ecke F liegt und aus der vierseitigen Pyramide $FEACD$, deren Spitze ebenfalls in F liegt. Die letztere ist aber, wenn man BE und BD zieht, der vierseitigen Pyramide $BEACD$ gleich. Diese Pyramide zerfällt aber in die zwei dreiseitigen Pyramiden $BEAC$ und $BECD$, erstere hat mit dem dreiseitigen Prisma gemeinschaftlich die Grundfläche ABC und ihre Spitze liegt in der zweiten Ecke E; die andere $BEDC$ ist, wenn man noch DA zieht, der dreiseitigen $ABCD$ gleich, mit der sie gleiche Höhe und dieselbe Grundfläche BCD hat. $ABCD$ hat aber mit dem abgeschnittenen dreiseitigen Prisma ebenfalls die gemeinschaftliche Grundfläche ABC, während ihre Spitze in D liegt. Die Richtigkeit des Satzes ist somit dargethan.

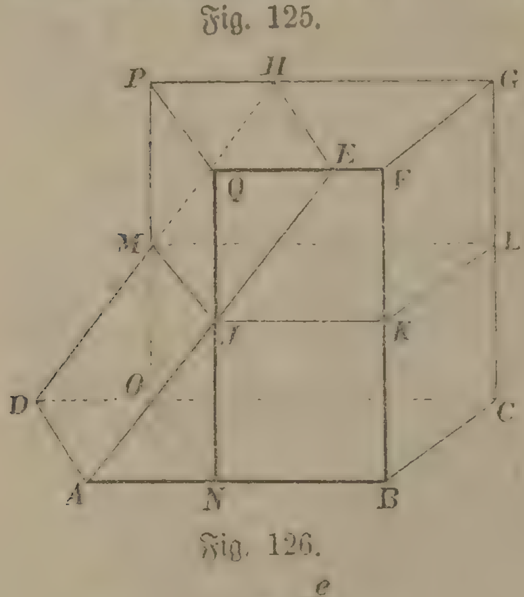
Zusatz. Das abgeschnittene dreiseitige Prisma ist auch einem Prisma auf derselben Grundfläche ABC gleich, dessen Seitenkanten das arithmetische Mittel aus den drei Seitenkanten AE, BF und CD d. i. $\tfrac{1}{3}(AE + BF + CD)$ sind.

Der Beweis läßt sich entweder durch Anwendung von Proportionen, oder mit Hülfe irgend eines auf den Seitenkanten senkrechten Querschnittes führen.

Im letzteren Falle betrachte man den Körper als Summe oder Differenz zweier senkrechten abgeschnittenen Prismen. Letzteres führt auch zu folgendem Ausdrucke: Der Inhalt eines jeden dreiseitigen prismatischen Stumpfes ist dem Producte seines senkrechten Querschnittes in die mittlere Länge der Seitenkanten gleich.

22. Satz. Ein vierseitiger Obelisk (*ABCDEFGH*), bei welchem außer den Grundflächen (*ABCD* und *EFGH*) noch 2 andere gegenüberstehende Grenzflächen (*ABFE* und *DCGH*) einander parallel sind, ist an Inhalt einem Prisma gleich, welches die mittlere Durchschnittsfigur (*MJKL*) (III., 19) zur Grundfläche und dieselbe Höhe wie der Obelisk hat. (Fig. 125.)

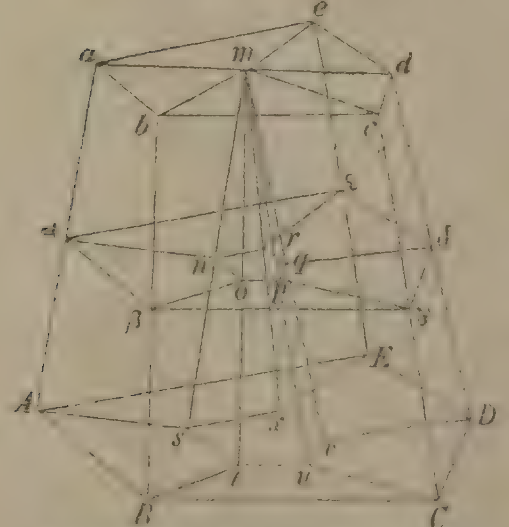
Fig. 125.



Beweis. Zieht man durch *M* und *J* mit *FB* die Parallelen *OMP* und *NJQ*, welche die Grundebenen in *O*, *P*, *N* und *Q* schneiden, so läßt sich leicht nachweisen, daß das Prisma *ONBCGFQP* dem gegebenen Obelisken *ABCDHEFG* an Inhalt gleich ist. Es ist nämlich das dreiseitige Prisma *PMHEQJ* dem dreiseitigen Prisma *DOMJAN* an Inhalt gleich, folglich u. s. w.

Zusatz. Der Satz gilt auch noch für den Fall, wo die obere Grundfläche *HEFG* zu einem Dreiecke wird, wenn nämlich *EF* verschwindet.

Fig. 126.



23. Satz. Ein jeder Obelisk ist der Summe eines Prisma's und einer Pyramide gleich, welche bezüglich die mittlere Durchschnittsfigur und die Ergänzungsfigur (III., 21) des Obelisken zu Grundflächen und die Höhe des Obelisken zur gemeinschaftlichen Höhe haben*).

Beweis. Es sei gegeben der *n*-seitige Obelisk (Fig. 126) mit den Grundflachen *ABCDE* und *abcde*. Durch einen beliebigen Punkt *m* der Grundfläche *abcde*

*) Koppe'scher Satz.

lege man mit den Seitenkanten die Parallelen *ms*, *mt*, *mu*, *mv* und *mx*, welche die untere Grundfläche in den Punkten *s*, *t*, *u*, *v* und *x*, die Ebene des mittleren Durchschnittes $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ in den Punkten *n*, *o*, *p*, *q* und *r* treffe. Man bezeichne den mittleren Durchschnitt $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ des Obelisken mit *M*, die Ergänzungsfigur *nopqr* mit *E*, die Höhe des Obelisken mit *h*. Zieht man *ma*, *mb*, *mc*, *md* und *me*, ferner *sA*, *tB*, *uC*, *vD* und *xE*, so zerfällt der Obelisk 1) in eine Pyramide *mstuvx* und 2) in eine Anzahl vierseitiger Obelisken *ABtsmab*, *BCutmbc* u. s. w., deren untere Grundflächen Trapeze *ABts*, *BCut* u. s. w., und deren obere Grundflächen Dreiecke *abm*, *bcm* u. s. w. sind. Nach dem vorhergehenden Satze (Zusatz) ist jeder dieser vierseitigen Obelisken einem Prisma gleich von derselben Höhe und einer Grundfläche, die seine mittlere Durchschnittsfigur ist. Es ist also die Summe sämmtlicher vierseitiger Obelisken einem Prisma gleich, dessen Höhe *h* und dessen Grundfläche = $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ — *nopqr* = *M* — *E* ist. Da nun *stuvx* = 4 *E*, so ist der Inhalt der Pyramide $mstuvx = \frac{4\,Eh}{3}$. Der Inhalt des ganzen Obelisken ist somit:

$$(M - E)\,h + \tfrac{4}{3}\,Eh = Mh + \tfrac{1}{3}\,Eh, \text{ d. h.:}$$

es ist der Obelisk der Summe eines Prisma und einer Pyramide gleich, welche bezüglich die mittlere Durchschnittsfigur und die Ergänzungsfigur des Obelisken zu Grundflächen und die Höhe des Obelisken zur gemeinschaftlichen Höhe haben.

Zusatz. Sind die Grundflächen des Obelisken Rechtecke und heißen *a* und *m* die Seiten der unteren Grundfläche, *b* und *n* die der oberen Grundfläche, so ist die Fläche des mittleren Schnittes $M = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{m+n}{2}$, die der Ergänzungsfigur $E = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{m-n}{2}$. Der Inhalt des Körpers, der den Namen „Ponton" oder „Kasten" führt, ist demnach:

$$(M + \tfrac{1}{3}\,E)\,h = \tfrac{1}{6}\,h\,[(2a + b)\,m + (2b + a)\,n].$$

Beispiel. $a = 3{,}17^{m}$, $m = 2{,}43^{m}$, $b = 2{,}09^{m}$, $n = 1{,}47^{m}$, $J = 9{,}191552$ Cub.-Met.

2. Zusatz. Sind die Grundflächen *G* und *g* des Obelisken ähnliche Vielecke, so wird man

$$M = \left(\frac{\sqrt{G} + \sqrt{g}}{2}\right)^2, \quad E = \left(\frac{\sqrt{G} - \sqrt{g}}{2}\right)^2$$

erhalten. Für den Inhalt der abgestumpften Pyramide wird man alsdann nach einigen leichten Umformungen:

$$\frac{h}{3}\,(G + \sqrt{Gg} + g)$$

erhalten, was mit Satz 20 übereinstimmt.

Vierter Abschnitt.

Die fünf regulären Polyeder. Inhalt und Oberfläche derselben.

24. Aufgabe. I. Aus der gegebenen Kante a eines regulären Polyeders die Oberfläche desselben zu berechnen.

Auflösung. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a ist, ist gleich $\frac{1}{4}\sqrt{3}\,a^2$, der Inhalt eines regulären Fünfeckes von der Seite a ist $\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2 = 1{,}720477\ a^2$ (Planimetr. VI., 15d). Es ist hiernach, wenn man die Oberflächen des Tetraeders, Hexaeders, Octaeders, Dodekaeders und Ikosaeders mit O_4, O_6, O_8, O_{12} und O_{20} bezeichnet:

1) $O_4 = \sqrt{3}\ a^2 = 1{,}7320508\ a^2$
2) $O_6 = 6\ a^2$
3) $O_8 = 2\sqrt{3}\ a^2 = 3{,}464116\ a^2$
4) $O_{12} = 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\ a^2 = 20{,}645729\ a^2$
5) $O_{20} = 5\sqrt{3}\ a^2 = 8{,}660254\ a^2$.

1. Zusatz. $O_4 : O_8 : O_{20} = 1 : 2 : 5$.

2. Zusatz. Aufgabe. Die Seitenkante a eines regulären Körpers zu berechnen, wenn die Oberfläche desselben gegeben ist.

Die Auflösung leicht mit Hülfe der obigen Formeln. Ist z. B. die Oberfläche O des Dodekaeders gegeben, so findet sich dessen Seitenkante.

$$a = \sqrt{\frac{O}{3\sqrt{25+10\sqrt{5}}}} = \sqrt{\tfrac{1}{15}}\,\sqrt[4]{5-2\sqrt{5}}\,\sqrt{O} = 0{,}220082\sqrt{O}.$$

25. Aufgabe. II. Aus der Kante a eines regulären Polyeders den Inhalt desselben zu berechnen.

Auflösung. Die Inhalte des regulären Tetraeders, Hexaeders, Octaeders, Dodekaeders und Ikosaeders, deren Kante $= a$ ist, mögen durch J_4, J_6, J_8, J_{12} und J_{20} bezeichnet werden.

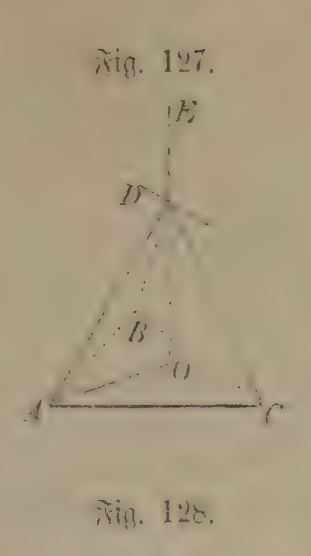
1) Zieht man in dem regulären Tetraeder $ABCD$ (Fig. 127) die Höhe DO und verbindet O mit A, so ist: $DO^2 = DA^2 - AO^2 = DA^2 - \frac{1}{3} DA^2$ (Plan. VI., 10, Zus. 3) $= \frac{2}{3} a^2$;

also: $DO = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$;

$\triangle\, ABC = \frac{1}{4} \sqrt{3}\, a^2$, mithin:

$J_4 = \frac{1}{12} \sqrt{2}\, a^3 = 0,1178511\, a^3$.

Fig. 127.

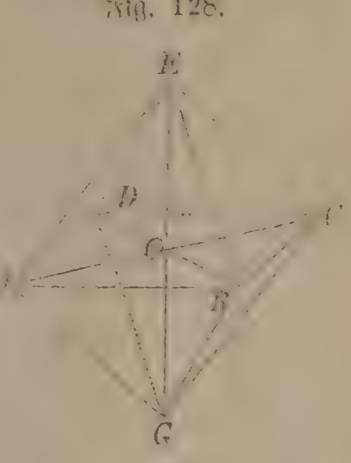


2) der Inhalt des Würfels $J_6 = a^3$.

3) Denkt man sich das reguläre Oktaeder (Fig. 128) aus den beiden congruenten vierseitigen Pyramiden $EABCD$ und $GABCD$ zusammengesetzt, so ergibt sich, da $EO = \frac{1}{2} \sqrt{2}\, a$,

$$J_8 = \sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}\, a^3 = 0,4714045\, a^3.$$

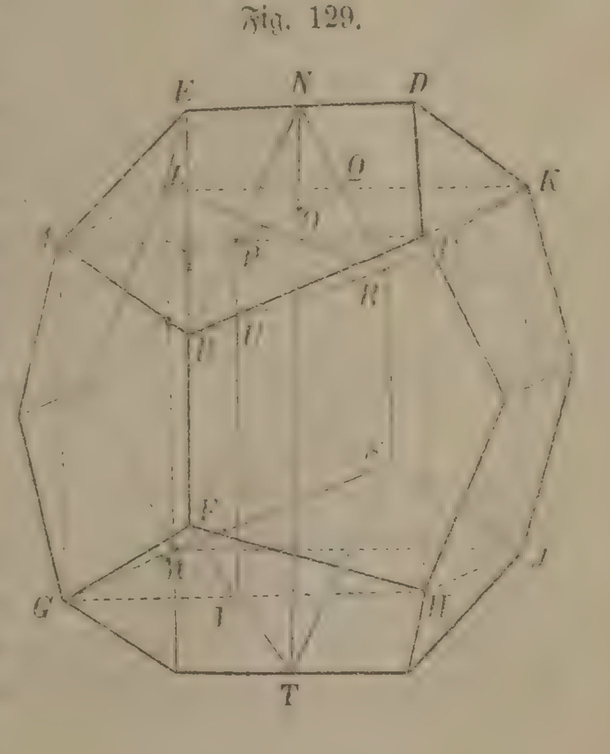
Fig. 128.



4) Es sei DGJ (Fig. 129) ein Dodekaeder. Zieht man die 12 Diagonalen AC, CK, KL, LA, AG, LM, KJ, CH, GM, MJ, JH und HG, so bilden diese, wie leicht zu beweisen ist, die Kanten eines Würfels $ACKLMGHJ$. Das ganze Dodekaeder besteht aus diesem Würfel und den sechs, seinen Seitenflächen aufsitzenden, abgestumpften, dreiseitigen Prismen $ACKLED$, $ACHGFB$ u. s. w. und ist demnach die Summe derselben. Die Bestimmung des Würfels ist einfach, da seine Seite die Diagonale d eines regelmäßigen Fünfeckes ist, dessen Seite $= a$. Nach Plan. VI., 15 ist $d = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)a$, also der Würfel:

$$d^3 = (2 + \sqrt{5})\, a^3.$$

Fig. 129.



Durch die beiden gegenüberliegenden und parallelen Kanten BF und RS des Dodekaeders sei eine Ebene gelegt; diese wird

1) das Dodekaeder in einem Sechsecke $BNBSTF$ durchschneiden, wovon je zwei gegenüber liegende Seiten gleich und parallel sind, 2) wird sie die Kante ED des Dodekaeders, die ihr gegenüberstehende und die damit parallelen Kanten AC, LK, GH und MJ des Würfels in N, T, P, Q, V u. s. w. halbiren und endlich wird sie auf diesen Kanten und den durch sie gehenden Ebenen senkrecht stehen. Der senkrechte Querschnitt, den diese Ebene in dem abgestumpften dreikantigen Prisma $ACKLED$ macht, ist ein gleichschenkeliges Dreieck NPQ, dessen Grundlinie PQ und Höhe NO ist. Jene ist der Seite CK des Würfels, d. i. der Diagonale d eines der Pentagone gleich, welche den Körper begrenzen. Um die Höhe NO zu bestimmen, ziehe man BR und PV, welche sich in U schneiden. Es ist $BR \parallel PQ$, daher $\triangle NPO \sim PBU$ und also

$$NP : PB = PO : BU.$$

Nach Plan. VI., 15 d wird aber die Diagonale BE des regelmäßigen Fünfeckes $ABCDE$ in X, wo sie von der andern Diagonale AC getroffen wird, stetig getheilt und der größere Abschnitt EX ist $= AE$, daher auch

$$NP : BP = EX : XB = BE : EX.$$

Aus dieser und der obigen Proportion folgt, daß

$$PO : BU = BE : EX.$$

Da nun $PO = \frac{1}{2}\ PQ = \frac{1}{2}\ BE$, so ist $BU = \frac{1}{2}\ EX$. Aber $BU = NO$, wie aus der Congruenz der obengenannten dreiseitigen abgestumpften Prismen folgt und $EX = AE = a$, daher

$$NO = \tfrac{1}{2}a.$$

Der Inhalt des Querschnittes NPQ ist demnach $= \frac{1}{4}\ ad$ und der Inhalt eines der sechs abgestumpften dreiseitigen Prismen (21, Zus.):

$$\tfrac{1}{4}\ da \cdot \tfrac{1}{3}\ (2\ d + a).$$

Der Inhalt sämmtlicher 6 Prismen ist also:

$$\tfrac{1}{2}\ da\ (2\ d + a) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\ a\ (\sqrt{5} + 1)\ a^2\ (\sqrt{5} + 2) = \tfrac{1}{4} (7 + 3\ \sqrt{5})\ a^3.$$

Setzt man hierzu den Inhalt des Würfels d^3, so erhält man nach ausgeführter Reduction:

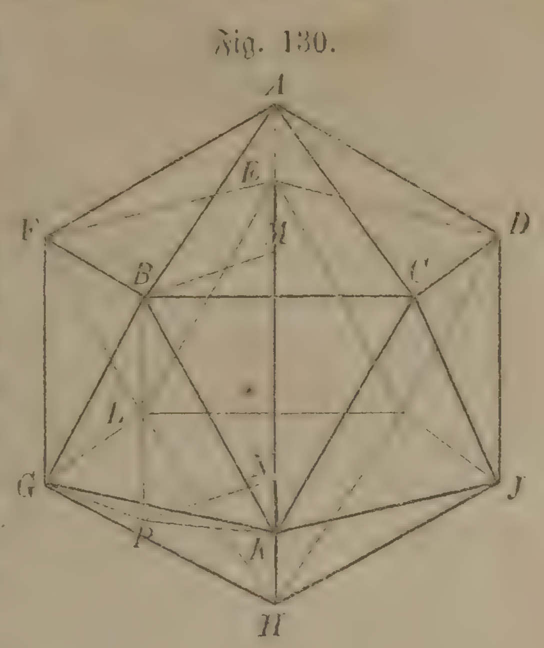
$$J_{12} = \tfrac{1}{4}\ (15 + 7\ \sqrt{5})\ a^3 = 7{,}663119\ a^3.$$

5) Der Inhalt J_{20} des regulären Ikosaeders ergibt sich durch nachfolgende Betrachtung (Fig. 130):

Es sei $ABCDH$ ein Ikosaeder. Legt man durch $BCDEF$ und $LGKJ$ Ebenen und zieht man von der Spitze A nach der gegenüber stehenden H eine Gerade, welche jene Ebenen in M und N schneidet, so zerfällt das ganze Ikosaeder in zwei fünfseitige reguläre Pyramiden von gleichen Höhen AM

und HN und in einen Obelisken mit zwei parallelen fünfseitigen Grundflächen, zehn dreiseitigen Seitenflächen und mit der Höhe MN.

Fig. 130.



Es ist nun die Seite des regulären Fünfeckes $BCDEF$ als Kante des Ikosaeders $= a$. Es heiße der Radius des um dieses Fünfeck beschriebenen Kreises u und endlich heiße die Seite des in denselben Kreis eingeschriebenen Zehneckes q, alsdann finden folgende Beziehungen Statt:

(1) $a^2 = q^2 + u^2$ (Plan. VII., 105).

(2) $q = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\,u$ ⎫
(3) $u = \frac{1}{2}a\sqrt{2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$ ⎭ (Plan. VI. 11, Zus. und 15 d).

Verbindet man B mit M, so ist:

$$BM = u,\ AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - u^2, \text{ mithin:}$$
$$\text{nach (1) } AM = q.$$

Fällt man ferner von B auf die erweiterte Ebene $LGKJ$ die Senkrechte BP und verbindet P mit G und K, so sind offenbar GP, PK die Seiten eines Zehneckes, welches mit dem Fünfecke $LGKJ$ gleichen umgeschriebenen Kreis hat, es ist also $PK = PG = q$. Da nun

$$BP^2 = BK^2 - PK^2 \text{ d. i. } = a^2 - q^2, \text{ so ist:}$$
$$BP = u, \text{ also auch } MN = u.$$

Heißt F der Inhalt des Fünfeckes BD oder GJ, Z der Inhalt eines Zehneckes, welches mit dem Fünfecke gleichen umschriebenen Kreis hat, so ist:

(4) $Z = (\sqrt{5} - 1)\,F$ (Plan. VI., 11, Zus.).

(5) $F = \frac{1}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\;a^2$.

Die Summe der beiden Pyramiden ABE und HGJ ist gleich:

(6) $\frac{2}{3}\,qF = \frac{1}{3}(\sqrt{5} - 1)\,uF$ (2).

Was nun den Inhalt des zwischen den parallelen Flächen BD und GJ enthaltenen Obelisken betrifft, so läßt sich derselbe am einfachsten berechnen, wenn man aus den Ecken B, C, D, E und F auf die gegenüberstehende Ebene GJ und aus den Ecken $G, K, J, \ldots$ auf die gegenüberstehende Ebene BD Senkrechte fällt und die Endpunkte dieser Senkrechten mit den benachbarten

Ecken der Fünfecke verbindet. Es entsteht hierdurch ein Prisma, dessen Grundfläche ein reguläres Zehneck und zwar $= Z$, und dessen Höhe $BP = u$, dessen Inhalt also:

$$(7)\ Zu = (\sqrt{5} - 1)\ Fu$$

ist. Zieht man von demselben 10 Pyramiden, wie $BGPK$ u. s. w. ab, so erhält man den verlangten Obelisken $GJBD$. Der Inhalt dieser 10 Pyramiden findet sich leicht, wenn man berücksichtigt, daß die Summe der fünf Dreiecke GPK u. s. w. gleich $Z - F = (\sqrt{5} - 2)\ F$ (4) ist. Die 10 Pyramiden haben somit zusammen den Inhalt:

$$(8)\ \tfrac{2}{3}\ (\sqrt{5} - 2)\ F \cdot u.$$

Zieht man letzteren Ausdruck von dem Inhalte des 10seitigen Prisma ab, so bleibt für den Inhalt des Obelisken:

$$(9)\ \tfrac{1}{3}\ (\sqrt{5} + 1)\ uF.$$

Durch Addition von (6) und (9) endlich erhält man den Inhalt des Ikosaeders:

$$(10)\ J_{20} = \tfrac{2}{3} uF \sqrt{5}.$$

Setzt man nun noch für u und F die in (3) und (5) angegebenen Werthe, so erhält man nach ausgeführter Reduction:

$$J_{20} = \tfrac{5}{12} \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}\ a^3 = \tfrac{5}{12}\ (3 + \sqrt{5})\ a^3 = 2{,}181695\ a^3.$$

Zusatz. Die Summe der beiden Pyramiden ABD und HGJ verhält sich also zum Obelisken $GJFD$ wie $\sqrt{5} - 1 : \sqrt{5} + 1$, d. i. wie der kleinere Theil einer nach stetiger Proportion getheilten Linie zur ganzen Linie (Planim. V., 68).

26. Aufgabe. III. Aus der gegebenen Kante a eines regulären Polyeders soll berechnet werden: 1) der Abstand des Centrums von den Ecken oder der Radius R einer durch alle Ecken gehenden Kugelfläche (der umgeschriebenen Kugel), 2) der Abstand des Centrums von den Seitenflächen des Körpers oder der Radius r der alle Seitenflächen berührenden (eingeschriebenen) Kugel und 3) der Abstand des Centrums von der Mitte der Kanten oder der Radius ϱ der Kugel, welche sämmtliche Kanten berührt.

Auflösung. Heißen P und p die Radien der Kreise, welche einer Seitenfläche des Polyeders umgeschrieben oder eingeschrieben sind, so finden zunächst folgende, leicht einzusehende, Beziehungen zwischen den fünf Radien R, r, ϱ, P und p und der Seitenkante a Statt:

$$1)\ P^2 = p^2 + \tfrac{1}{4} a^2;\quad 2)\ R^2 = P^2 + r^2;\quad 3)\ \varrho^2 = p^2 + r^2.$$

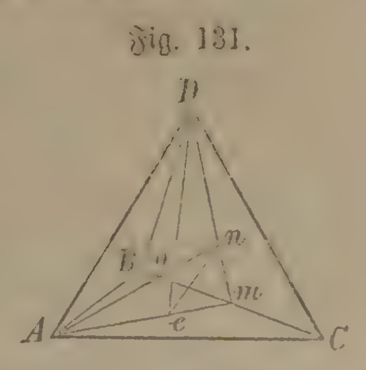
Hieraus folgt:

$$R^2 - \varrho^2 = P^2 - p^2;\quad P^2 - \varrho^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - r^2;$$

Zu diesen allgemein für alle fünf regulären Polyeder geltenden Bezeichnungen treten nun noch die folgenden besonderen Bestimmungen.

1) Reguläres Tetraeder, ein solches sei $ABCD$. Zieht man von A und D nach den Mittelpunkten n und e der gegenüberstehenden Seitenflächen die Linien An und De, so läßt sich leicht nachweisen, daß dieselben erstens sich in einem Punkte o treffen, und daß zweitens $oe = \frac{1}{4}\, eD$, $oD = \frac{3}{4}\, eD$. Es ist aber nach obigen Bezeichnungen $oD = R$, $oe = r$, $Ae = P$, $em = p$ und nach Planim. VI., 10, verbunden mit II., 53:

Fig. 131.



$$P = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\; a, \quad p = \tfrac{1}{2} \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, a; \text{ ferner noch:}$$

$$eD^2 = \tfrac{2}{3}\, a^2 \;(25,\ 1), \text{ also:}$$

$$R = \tfrac{3}{4} \sqrt{\tfrac{2}{3}}\; a = \tfrac{1}{4} \sqrt{6}\, a,\; r = \tfrac{1}{12} \sqrt{6}\; a,\;\; \varrho = \tfrac{1}{4} \sqrt{2}\; a.$$

1. Zusatz. $R : r : \varrho = 3 : 1 : \sqrt{3}$.

2. Zusatz. $R : \varrho = \varrho : r$.

2) Für den Würfel ist

$$P = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; a = 0{,}707107\; a, \quad p = \tfrac{1}{2}\; a$$

$$\varrho = P = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; a = 0{,}707107\; a; \quad r = p = \tfrac{1}{2}\, a; \quad R = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\; a = 0{,}8660254\; a.$$

3) Im regulären Oktaeder ist, wie beim Tetraeder $P = a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $p = \frac{1}{2}\, a \sqrt{\tfrac{1}{3}}$; ferner ergibt sich daraus, daß die drei Diagonalen des Körpers sich im Mittelpunkte desselben rechtwinkelig durchkreuzen und jede also ein Durchmesser der umgeschriebenen Kugel ist, daß $R = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\; a = 0{,}707107\; a$. Ferner ist, wie unmittelbar erhellt, $\varrho = \frac{1}{2}\, a$, hieraus folgt $r \doteq \sqrt{\tfrac{1}{6}}\; a = 0{,}408248\; a$.

Zusatz. $R : r : \varrho = 2\sqrt{3} : 2 : \sqrt{6}$.

4) Für das Dodekaeder ist:

$$P = \tfrac{1}{2} \sqrt{2 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\; a, \quad p = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\; a \text{ (Plan. VI., 15 } d\text{).}$$

Nach Figur 129 des Dodekaeders S. 123 ist R als Radius der um den Würfel AKH beschriebenen Kugel zu betrachten. Aus der Seite d dieses Würfels ergibt sich nach (2):

$$R = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\; d, \text{ oder da } d = \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{5} + 1)\; a:$$

$$R = \tfrac{1}{4} \sqrt{3}\; (\sqrt{5} + 1)\; a = \tfrac{1}{4}\; (\sqrt{15} + \sqrt{3})\; a = \tfrac{1}{4} \sqrt{18 + 6\sqrt{5}}\; a = 1{,}401259\; a.$$

Was ϱ betrifft, so ist in Rücksicht auf Figur 129:

$$NT = 2\,\varrho = d + 2\; ON = d + a = \tfrac{1}{2}\; (\sqrt{5} + 3)\; a.$$

Es ist also:

$$\varrho = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 3)\, a = 1{,}309017\, a.$$

Aus $r^2 = \varrho^2 - p^2$ erhält man:

$$r^2 = (\tfrac{5}{8} + \tfrac{11}{40}\sqrt{5})\, a^2, \text{ also:}$$

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + \tfrac{22}{5}\sqrt{5}}\; a = 1{,}113516\, a.$$

Zu demselben Resultate von r würde man durch die Formel $r^2 = R^2 - P^2$ gelangt sein.

5) Für das **Ikosaeder** ist, wie für das Tetraeder:

$$P = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, a,\; p = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\; a.$$

Aus der Figur 130, Seite 125 für das Ikosaeder ergibt sich:

$AH = 2R = 2AM + MN = 2q + a$ (s. vorherg. Aufgabe 25, 5).

Es ist aber $q = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\, a$ (Plan. VI., 11, Zus. 1), folglich:

$$R = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\; a.$$

Setzt man endlich für a den Werth $\tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\; a$ (Plan. VI., 15 d), so wird:

$$R = \tfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\; a = 0{,}95106\, a.$$

Hieraus ergibt sich:

$$r = \tfrac{1}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}\; a = \tfrac{1}{12}(3\sqrt{3} + \sqrt{15})\, a = 0{,}7557613\, a.$$

ϱ ergibt sich am einfachsten durch die Betrachtung, daß, wenn man die Mitten zweier gegenüber stehenden parallelen Kanten DJ und FG der obigen Figur 130 mit einander durch eine Gerade verbindet, diese Verbindungslinie durch den Mittelpunkt des Ikosaeders geht und sowohl der 2ϱ gleich wird, als der Diagonale FD des regulären Fünfeckes $BCDEF$, dessen Seite a ist. Diese ist nach Plan. VI., 15 $d = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)\, a$, daher:

$$\varrho = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)\, a = 0{,}809017\, a.$$

Dasselbe Resultat für ϱ erhält man aus der Formel $\varrho^2 = p^2 + r^2$.

Zusatz. Der Radius R der umgeschriebenen Kugel ist auf folgende Weise leicht zu construiren. Man bilde ein reguläres Zehneck mit der gegebenen Seite a. Die halbe Seite des Fünfeckes, welches mit diesem Zehnecke gleichen umgeschriebenen Kreis hat, ist der verlangte Radius. Der Grund dieser Construction ist in Plan. VI., 11, Zus. 3 zu suchen.

27. **Aufgabe. IV. Aus der Oberfläche O eines regulären Polyeders und dem Radius r der eingeschriebenen Kugel den Inhalt desselben zu finden.**

Auflösung. Denkt man sich das reguläre Polyeder in Pyramiden zerlegt, welche die Seitenflächen zu Grundflächen, den Mittelpunkt des Polyeders zur Spitze haben, so ergibt sich $J = \tfrac{1}{3}\, r\, O$.

Zusatz. Mit Hülfe der in Aufg. I. gefundenen Werthe für die Oberfläche der fünf regulären Körper und der in Aufg. III. gefundenen Werthe von r ergeben sich auf eine andere Weise die Inhalte der fünf Körper und dieselben Resultate, welche man durch directe Behandlung der Aufgaben vom Inhalte in Aufg. III. erhalten hat.

28. **Aufgabe. V. Aus einem der drei in Aufg. III. mit R, r und ϱ bezeichneten Halbmesser Inhalt und Oberfläche der fünf regulären Polyeder zu finden.**

Auflösungen. 1) Tetraeder. Aus dem in Aufg. III. ermittelten Werthe von $R = \frac{1}{4}a\sqrt{6}$, $r = \frac{1}{12}a\sqrt{6}$, $\varrho = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ folgt $a = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,R = 2r\sqrt{6} = 2\,\varrho\,\sqrt{2}$. Durch Substitution dieser Werthe von a in die bei Aufg. I. und II. gefundenen Ausdrücke erhält man:

$$O_4 = \tfrac{8}{3}\sqrt{3}\,R^2 = 4{,}618802\,R^2,$$
$$= 24\sqrt{3}\,r^2 = 41{,}569219\,r^2,$$
$$= 8\sqrt{3}\,\varrho^2 = 13{,}8564064\,\varrho^2.$$
$$J_4 = \tfrac{8}{27}\sqrt{3}\,R^3 = 0{,}5132002\,R^3,$$
$$= 8\sqrt{3}\,r^3 = 13{,}8564064\,r^3,$$
$$= \tfrac{8}{3}\varrho^3 = 2\tfrac{2}{3}\varrho^3.$$

2) Hexaeder. Aus den in Aufg. III. angegebenen Werthen von R, r und ϱ ergibt sich $a = \frac{2}{3}R\sqrt{3} = 2\,r = \varrho\sqrt{2}$; daher:

$$O_6 = 8\,R^2 = 24\,r^2 = 12\,\varrho^2.$$
$$J_6 = \tfrac{8}{9}\sqrt{3}\,R^3 = 1{,}5396007,$$
$$= 8\,r^3,$$
$$= 2\sqrt{2}\,\varrho^3 = 2{,}8284271\,\varrho^3.$$

3) Octaeder. Aus den Werthen für R, r und ϱ in Aufg. III. folgt $a = R\sqrt{2} = r\sqrt{6} = 2\varrho$; daher:

$$O_8 = 4\sqrt{3}\,R^2 = 6{,}9282032\,R^2,$$
$$= 12\sqrt{3}\,r^2 = 10{,}3923048\,r^2,$$
$$= 8\sqrt{3}\,\varrho^2 = 13{,}8564064\,\varrho^2.$$
$$J_8 = \tfrac{4}{3}\,R^3,$$
$$= 4\sqrt{3}\,r^3 = 6{,}9282032\,r^3,$$
$$= \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,\varrho^3 = 3{,}7712362\,\varrho^3.$$

4) Dodekaeder. Aus den Werthen $R = \frac{1}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3})a$, $r = \frac{1}{4}\,a\sqrt{10 + \frac{22}{5}\sqrt{5}}$, $\varrho = \frac{1}{4}\,a\,(3 + \sqrt{5})$ folgt durch Umkehrung $a = \frac{1}{3}\,R(\sqrt{15} - \sqrt{3}) = r\sqrt{50 - 22\sqrt{5}} = \varrho\,(3 - \sqrt{5})$.

Wenn man diese letzteren Ausdrücke in die von O und J substituirt, so erhält man:

$$O_{12} = 2\sqrt{10\,(5-\sqrt{5})}\,R^2 = 10{,}51464\ R^2,$$
$$= 30\sqrt{130-58\sqrt{5}}\,r^2 = 16{,}650915\ r^2,$$
$$= 6\sqrt{10\,(25-11\sqrt{5})}\,\varrho^2 = 12{,}04869\ \varrho^2.$$
$$J_{12} = \tfrac{2}{3}\,(5\sqrt{3}+\sqrt{15})\,R^3 = 2{,}7851638\ R^3,$$
$$= 10\sqrt{130-58\sqrt{5}}\,r^3 = 5{,}55028\ r^3,$$
$$= 2\,(3\sqrt{5}-5)\,\varrho^3 = 3{,}416408\ \varrho^3.$$

5) Ikosaeder. Aus den in Aufg. III. gefundenen Werthen von R, r und ϱ folgt durch Umkehrung:

$$a = R\sqrt{2-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}} = r\,(3\sqrt{3}-\sqrt{15}) = \varrho\,(\sqrt{5}-1);$$ daher:

$$O_{20} = \sqrt{2-\tfrac{2}{5}\sqrt{5}}\,R^2 = 1{,}1051462\ R^2,$$
$$= (3\sqrt{3}-\sqrt{15})\,r^2 = 1{,}3231691\ r^2,$$
$$= (\sqrt{5}-1)\,\varrho^2 = 1{,}236068\ \varrho^2.$$
$$J_{20} = \tfrac{2}{3}\sqrt{2\,(5+\sqrt{5})}\,R^3 = 2{,}536151\ R^3,$$
$$= 10\,(7\sqrt{3}-3\sqrt{15})\,r^3 = 5{,}054056\ r^3,$$
$$= \tfrac{10}{3}\,(\sqrt{5}-1)\,\varrho^3 = 4{,}12023\ \varrho^3.$$

1. Zusatz. Sind ein und derselben Kugel mit dem Radius R die 5 regulären Körper eingeschrieben, so ist:

1) $O_4 : O_8 = 2 : 3.$

2) $J_4 : J_6 = 1 : 3.$

3) $O_4 : O_6 = O_6 : 2O_8.$

4) $O_6 : O_8 = J_6 : J_8 = 2 : \sqrt{3}.$

5) $J_4 : \tfrac{2}{3} J_8 = \tfrac{2}{3} J_8 : J_6.$

6) $O_{12} : O_{20} = J_{12} : J_{20} = \sqrt{\tfrac{1}{6}\,(5+\sqrt{5})} : 1.$

2. Zusatz. Sind ein und derselben Kugel von dem Radius r die 5 regulären Polyeder umgeschrieben, so ist:

1) $O_4 : O_6 : O_8 : O_{12} : O_{20} = J_4 : J_6 : J_8 : J_{12} : J_{20}.$

2) $O_4 : O_8 = J_4 : J_8 = 2 : 1.$

3) $J_4 : J_6 = J_8 : 4\,r^3.$

4) $O_{12} : O_{20} = \sqrt{\tfrac{1}{6}\,(5+\sqrt{5})} : 1 = J_{12} : J_{20}.$

Es verhalten sich demnach die Oberflächen der einer Kugel eingeschriebenen Dodekaeder und Ikosaeder, wie die Oberflächen der dieser Kugel umgeschriebenen Dodekaeder und Ikosaeder.

3. Zusatz. Berühren die Kanten der 5 regulären Polyeder ein und dieselbe Kugel mit dem Radius ϱ, so ist:

1) $O_4 = O_8$.
2) $J_6 : J_8 = 3 : 4$.
3) $J_4 : J_8 = 1 : \sqrt{2}$.
4) $J_4 : J_6 = J_8 : 4\varrho^2$.
5) $O_{12} : O_{20} = \sqrt{\tfrac{3}{10}(5 - \sqrt{5})} : 1$.
6) $J_{12} : J_{20} = \tfrac{3}{10}(5 - \sqrt{5}) : 1$.

29. **Aufgabe.** VI. Aus der Oberfläche jedes der fünf regulären Polyeder deren Inhalt zu finden.

1) $J_4 = \tfrac{1}{36}\sqrt[4]{12}\; O_4^{\frac{3}{2}} = 0{,}0517003\; O_4^{\frac{3}{2}}$.
2) $J_6 = \tfrac{1}{36}\sqrt{6}\; O_6^{\frac{3}{2}} = 0{,}0680414\; O_6^{\frac{3}{2}}$.
3) $J_8 = \tfrac{1}{18}\sqrt[4]{3}\; O_8^{\frac{3}{2}} = 0{,}0731152\; O_8^{\frac{3}{2}}$.
4) $J_{12} = \tfrac{1}{60}\sqrt[4]{4\tfrac{4}{9}(65 + 29\sqrt{5})}\; O_{12}^{\frac{3}{2}} = 0{,}0816883\; O_{12}^{\frac{3}{2}}$.
5) $J_{20} = \tfrac{1}{18}\sqrt[4]{0{,}06(47 + 21\sqrt{5})}\; O_{20}^{\frac{3}{2}} = 0{,}085605\; O_{20}^{\frac{3}{2}}$.

VI. Capitel.

Vom Inhalte der runden Körper.

Erster Abschnitt.

Cylinder und Kegel.

1. **Satz.** Jeder Cylinder ist an Rauminhalt einem Prisma gleich, welches mit ihm gleich große Grundfläche und gleiche Höhe hat; der Inhalt ist daher das Product aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. Sieht man, wie es erlaubt ist, die Grundfläche des Cylinders, sie sei welche sie wolle, als ein Polygon von unzählig vielen und unendlich kleinen Seiten an, so muß man folgerichtig den Cylinder selbst als

9*

ein Prisma betrachten, dessen Grundfläche jenes Polygon und dessen Höhe die des Cylinders ist. Nun sind aber alle Prismen von gleich großer Grundfläche und gleicher Höhe auch an Rauminhalt gleich; daher ist auch der Cylinder jedem Prisma gleich, welches mit ihm gleich große Grundfläche und dieselbe Höhe hat. Der arithmetische Ausdruck des Rauminhaltes eines solchen Prisma's, d. i. das Product aus Grundfläche und Höhe, ist daher auch der Ausdruck für den Inhalt des Cylinders *).

Zusatz 1. Zwei Cylinder von gleicher Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen; die von gleicher Höhe wie ihre Grundflächen und also auch, wenn diese Kreise sind, wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser derselben; sie sind an Inhalt gleich, wenn die Grundflächen (oder, wenn diese Kreise sind, die genannten Quadrate) sich umgekehrt verhalten, wie die Höhen. Cylinder überhaupt stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Zusatz 2. Aehnliche Kreiscylinder, d. i. solche, deren Achsen sich wie die Halbmesser der Grundflächen verhalten und gleiche Neigung gegen ihre Grundflächen haben, verhalten sich dem Inhalte nach wie die Würfel der Achsen oder Durchmesser der Grundflächen.

Zusatz 3. Ist r der Radius der Grundfläche eines Kreiscylinders, h dessen Höhe, so ist der cubische Inhalt desselben $J = \pi r^2 h$; hieraus folgt, wenn J gegeben ist, $h = \frac{J}{\pi r^2}$ und $r = \sqrt{\frac{J}{\pi h}}$.

2. Satz. Jeder Kegel ist an Rauminhalt der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat; der Inhalt des Kegels beträgt daher ein Drittel des Products aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. So wie der Cylinder als ein Prisma angesehen werden kann, dessen Grundfläche ein Vieleck von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten ist, eben so kann jeder Kegel als eine Pyramide gelten, deren Grundfläche die eben genannte Beschaffenheit hat. Das im vorhergehenden Capitel Nr. 13 vom Inhalte der Pyramide Bewiesene führt gleich auf die These des obigen Satzes.

Zusatz 1. Alles in Zus. 1 und 2 der vorhergehenden Nummer vom Verhältnisse der Cylinder Gesagte gilt auch vom Verhältnisse der Kegel.

*) Anm. S. den strengeren Beweis im Anhange VII.

Zusatz 2. Ist r der Radius der Grundfläche eines Kreiskegels, h seine Höhe, so ist der Inhalt des Kegels $J = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, also auch, wenn J gegeben ist, $h = \frac{3J}{\pi r^2}$, $r = \sqrt{\frac{3J}{\pi h}}$.

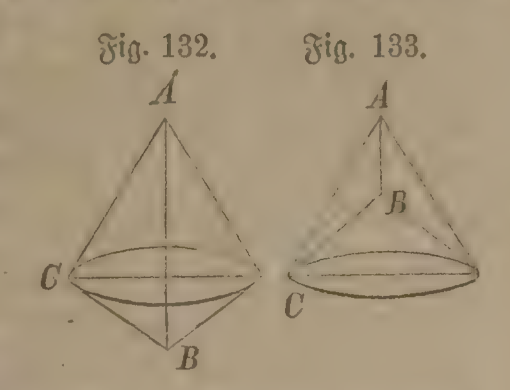


Fig. 132. Fig. 133.

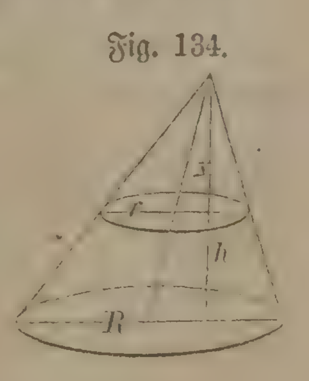
Zusatz 3. Der durch Umdrehung eines beliebigen Dreieckes um eine seiner Seiten (AB) als Achse beschriebene Körper (Doppelkegel Fig. 133, Hohlkegel Fig. 134) ist $= \frac{1}{3}$ des Products aus der Achse und der gemeinschaftlichen Grundfläche beider Kegel, deren Summe oder Differenz der Körper ist; dieser ist daher auch einem Kegel auf derselben Basis gleich, dessen Höhe der Achse des Doppel- oder Hohlkegels gleich kommt.

3. Satz. **Ein abgestumpfter Kegel (IV. 22, c) ist der Summe dreier ganzen Kegel gleich, welche mit ihm dieselbe Höhe haben und deren Grundflächen einzeln den Grundflächen des abgestumpften Kegels und einer mittleren Proportionale zu beiden gleich sind.**

I. Zunächst und unmittelbar kann dieser Satz aus dem fast ganz gleichlautenden und in Nr. 20 des vorigen Capitels bewiesenen Satze von der abgestumpften Pyramide abgeleitet werden. Betrachtet man nämlich eine der beiden Grundflächen des abgestumpften Kegels als ein Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten, so muß man die andere als ein ähnliches Polygon betrachten; die beiden Kegel, deren Differenz der abgestumpfte Kegel ist, werden bei dieser Ansicht ähnliche Pyramiden, der abgestumpfte Kegel selbst wird eine abgestumpfte Pyramide. Wendet man auf diese den in V., 20 bewiesenen Satz an, so ergibt sich alsbald die obige Aussage.

II. Unabhängig von der Pyramide ist für den Kreiskegel der Beweis in folgender Weise zu führen: der Radius der größeren Grundfläche des abgestumpften Kegels sei $= R$, der Radius der kleineren $= r$, seine Höhe $= h$, die Höhe des kleineren Kegels, der den abgestumpften zum vollständigen Kegel ergänzt, sei x, die Höhe des ganzen Kegels also $h + x$. Da $h + x : x = R : r$, so ist:

Fig. 134.



$$x = \frac{rh}{R - r},\ h + x = \frac{Rh}{R - r}.$$

Die Grundfläche, deren Radius R ist, ist aber $= \pi R^2$, die andere πr^2; daher der ganze Kegel $= \frac{1}{3} \pi R^2 (h + x) = \frac{1}{3} \pi h \cdot \frac{R^3}{R - r}$, der abgeschnittene $= \frac{1}{3} \pi r^2 x = \frac{1}{3} \pi h \cdot \frac{r^3}{R - r}$; der Kegelstumpf, als die Differenz beider, ist also $= \frac{1}{3} \pi h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$, was dem Satze entspricht.

Zu bemerken bleibt, daß, wenn man den abgestumpften Kegel als einen Obelisken betrachtet, dessen Grundflächen Polygone von unendlich kleinen Seiten sind, die Anwendung von Satz V., 23 über den Inhalt eines solchen Körpers zunächst auf folgenden Ausdruck für den Inhalt des abgekürzten Kegels führt:

$$\pi h \left[\left(\frac{R + r}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{R - r}{2}\right)^2 \right],$$

dessen Uebereinstimmung im Werth mit dem obigen leicht nachzuweisen ist.

III. Für den abgestumpften Kegel überhaupt, die Grundflächen seien Kreise oder andere krummlinig begrenzte, jedoch ähnliche, Figuren, läßt sich folgender allgemeine, auf jede Art von Kegel passende, Beweis geben.

Die größere Grundfläche des abgestumpften Kegels sei A, die kleinere B, seine Höhe h, die Höhe des ganzen Kegels, wie bei II. $h + x$; der Rauminhalt dieses letzteren Kegels ist dann $= \frac{1}{3} A (h + x)$; der des kleineren von ihm abgeschnittenen $= \frac{1}{3} Bx$; mithin der Inhalt des Kegelstumpfs $= \frac{1}{3} A (h + x) - \frac{1}{3} Bx = \frac{1}{3} Ah + \frac{1}{3} (A - B) x$. Wegen der Aehnlichkeit der Grundflächen A und B (I., 80) ist aber $A : B = (h + x)^2 : x^2$; daher, wenn C die mittlere Proportionale zu A und B bezeichnet, $A : C = C : B = h + x : x$*). Daraus folgt $A + C : C + B = h + x : x$ und hieraus $A - B : C + B = h : x$; folglich ist $(A - B) x = (B + C) h$. Der obige Ausdruck für den Inhalt des Körpers wird hierdurch $\frac{1}{3} h (A + B + C) = \frac{1}{3} Ah + \frac{1}{3} Bh + \frac{1}{3} Ch$, welcher dem Satze entspricht.

Anmerkung. Ueber den Inhalt hufförmiger Abschnitte des geraden Cylinders und Kegels s. den Anhang VIII.

---

*) Man vergleiche Planimetrie (5. Aufl.) V., 81, Zus. 5.

Zweiter Abschnitt.

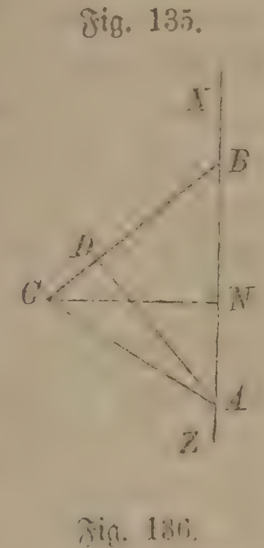
Kugel und Ring.

4. Hülfssatz. Der durch Umdrehung eines beliebigen Dreieckes um eine in seiner Ebene liegende und durch seine Spitze gehende Achse beschriebene Körper ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche dem von der Grundlinie des Dreieckes beschriebenen Mantel und dessen Höhe der Höhe des Dreieckes gleich ist.

Beweis. ABC (s. Figuren 135, 136 und 137) sei ein Dreieck, als dessen Spitze A und als dessen Grundlinie BC gelte; die Höhe sei AD. Dreht sich dieses Dreieck um eine in seiner Ebene durch A gezogene gerade Linie XZ als Achse, so wird der vom Dreiecke beschriebene Körper einem Kegel gleich sein, dessen Grundfläche so groß wie der von BC beschriebene Mantel und dessen Höhe AD ist. Zum Beweise unterscheide man drei Fälle:

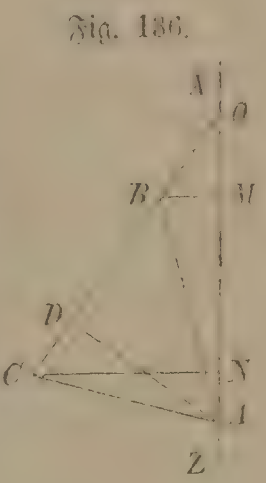
1. Fall: wenn die Achse XZ mit einer Seite des Dreieckes etwa mit AB zusammenfällt (Fig. 135). Der vom Dreiecke beschriebene Körper ist dann ein Doppel- oder Hohlkegel, dessen Inhalt nach S. 2, Zus. 3 $= \frac{1}{3}\pi \cdot CN^2 \cdot AB$, wo CN ein von C auf AB oder XZ gefälltes Loth bezeichnet. Das Product $AB \cdot CN$ ist aber $= CB \cdot AD$, daher jener Inhalt auch $= \frac{1}{3}\pi \cdot CN \cdot CB \cdot AD$. Aber $\pi \cdot CN \cdot CB$ ist nach IV., 39, Zus. 5 der Inhalt des von BC beschriebenen Kegelmantels, daher ist $\frac{1}{3}\pi \cdot CN \cdot CB \cdot AD$ der Rauminhalt eines Kegels, dessen Grundfläche diesem Mantel gleich und dessen Höhe AD ist.

Fig. 135.



2. Fall: wenn die Achse außerhalb des Dreieckes liegt, ohne jedoch einer Seite desselben parallel zu sein (Fig. 136). Verlängert man nun die Grundlinie CB des Dreieckes ACB bis zur Begegnung mit der Achse ZX in O, so beschreiben die Dreiecke ACO und ABO bei der Umdrehung um XZ zwei Doppelkegel, deren Differenz der vom Dreiecke ABC beschriebene Körper ist. Wendet man auf diese Doppelkegel das im ersten Falle Bewiesene an, so ergibt sich sogleich, daß der vom Dreiecke ABC beschriebene Körper einem Kegel

Fig. 136.



gleich ist, dessen Basis so groß wie der von BC beschriebene Mantel und dessen Höhe $= AD$ ist.

Fig. 137.

3. Fall. Ist die Achse XZ der Grundlinie BC des Dreieckes parallel (Fig. 137), so seien von B und C auf XZ die Lothe BM und CN gefällt. Der vom Dreiecke ABC beschriebene Körper ist nun der Ueberschuß des vom Rechtecke $BCNM$ beschriebenen Cylinders über die Summe der von BAM und CAN beschriebenen Kegel (oder eines der beiden letzten Körper über die Summe der beiden anderen). Berechnet man hiernach den Inhalt des von ABC beschriebenen Körpers, so findet er sich $= \frac{2}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot BC$. Es ist aber $2\pi \cdot AD \cdot BC$ der von BC beschriebene Mantel, daher entspricht auch hier der gefundene Rauminhalt der Aussage des Satzes.

Zusatz. Ist das Dreieck gleichschenkelig, nämlich $AB = AC$, so folgt aus der Verbindung dieses Satzes mit dem in IV., 43 aufgestellten, daß alsdann der vom Dreiecke beschriebene Körper auch $= \frac{2}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot MN$, d. h. zwei Drittel eines Cylinders betrage, dessen Grundfläche AD zum Radius hat und dessen Höhe $= MN$.

5. Satz. Der durch Umdrehung eines regulären Halbpolygons (IV. 44, Anm.) um seinen Grenzdurchmesser als Achse beschriebene Körper ist 1) an Inhalt einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der Oberfläche und dessen Höhe der Apotheme des Polygons gleich kommt, 2) derselbe Körper beträgt auch zwei Drittel eines Cylinders, dessen Grundfläche ein mit der Apotheme beschriebener Kreis und dessen Höhe der Achse gleich ist.

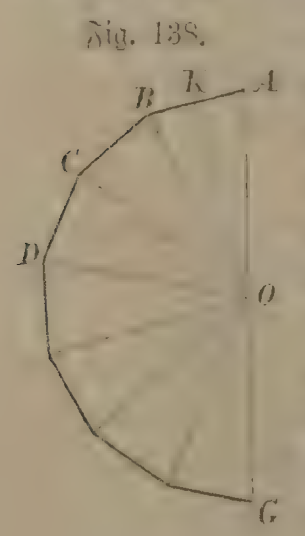


Fig. 138.

Beweis. Das Halbpolygon sei $ABCD \ldots G$, der dasselbe begrenzende Durchmesser AG, seine Mitte O. Verbindet man O mit den Ecken B, C, D, ... so zerfällt das Polygon in die gleichschenkeligen und congruenten Dreiecke OAB, OBC, ..., welche, wenn man die Seiten des Polygons als ihre Grundlinien betrachtet, alle einerlei Höhe haben; diese gemeinschaftliche Höhe ist die Apotheme OK des Polygons. Der ganze von dem Polygone beschriebene Körper ist die Summe der einzelnen, von den genannten Dreiecken bei der Umdrehung um AG

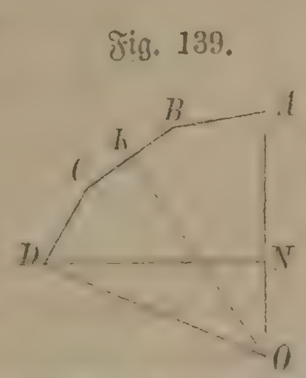
beschriebenen Körper. Wendet man auf diese den vorhergehenden Satz an und summirt die Inhalte aller Körper, so ergibt sich sofort der erste Theil des Satzes.

Was den zweiten Theil betrifft, so ist derselbe eine unmittelbare Folge des ersten in Verbindung mit IV., 44.

Zusatz 1. Der Satz gilt offenbar auch noch von jedem durch irgend ein, selbst irreguläres, Halbpolygon beschriebenen Körper, wofern die Seiten dieses Polygons alle gleichen Abstand von einem Punkte O der Achse haben, oder einen Kreis berühren, dessen Mitte O ist.

Zusatz 2. Läßt man, statt des Halbpolygons, nur einen Ausschnitt desselben oder überhaupt einen aus mehreren gleichschenkeligen congruenten Dreiecken bestehenden Polygonsector $ABCDO$ sich um den begrenzenden Halbmesser AO als Achse umdrehen, so ergibt sich ganz durch dieselben Schlüsse, wie die oben im Beweise angedeuteten, daß der beschriebene Körper

Fig. 139.



α) einem Kegel gleich ist, dessen Grundfläche der von der Polygonlinie $ABCD$ beschriebenen Fläche und dessen Höhe der Apotheme OK gleich kommt; daß derselbe Körper auch

β) zwei Drittel eines Cylinders beträgt, dessen Grundfläche die Apotheme OK zum Radius hat, und dessen Höhe der Projection AN der Polygonlinie $ABCD$ auf der Achse gleich ist.

6. Satz. **Die Kugel ist an Rauminhalt einem Kegel gleich, dessen Basis ihrer Oberfläche und dessen Höhe ihrem Radius gleich kommt; auch beträgt die Kugel zwei Drittel eines ihr umgeschriebenen Cylinders.**

Beweis. Die Kugel ist ein Körper, der durch vollständige Umdrehung eines Halbkreises um seinen begrenzenden Durchmesser beschrieben wird. Sieht man nun, wie in den früheren Sätzen, den Kreis als ein Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten an, so muß man auch die Kugel als einen Körper betrachten, der durch Umdrehung eines regulären Halbpolygons von solchen Seiten um den Grenzdurchmesser als Achse beschrieben wird, und kann auf sie unmittelbar dasjenige anwenden, was in S. 5 vom Rauminhalte eines solchen Körpers bewiesen worden ist. Aus dieser Anwendung folgt sogleich der erste Theil des Satzes, wenn man berücksichtigt, daß beim Uebergange vom Polygone zum Kreise die Apotheme des ersteren zum Radius des letzteren wird.

Derselbe erste Theil des Satzes ergibt sich auch noch durch folgende Betrachtung, welche eigentlich den kürzesten Weg darbietet, zu ihm zu gelangen. Man sehe die Oberfläche der Kugel als eine Zusammensetzung unzählig vieler, unendlich kleiner, Ebenen an, die Kugel selbst also als ein Polyeder, welches von diesen Ebenen begrenzt wird. Jede dieser kleinen Ebenen kann als Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels angesehen werden, welche ihre Spitze im Centrum der Kugel haben. Diese Pyramiden oder Kegel haben alle dieselbe Höhe, den Radius der Kugel nämlich; ihre Summe, d. i. die Kugel selbst, ist also einem Kegel von derselben Höhe gleich, dessen Basis der Summe aller Grundflächen jener Pyramiden oder Kegel, d. i. der ganzen Kugel-Oberfläche gleich ist.

Was den zweiten Theil des Satzes anbelangt, welcher die Kugel mit dem umgeschriebenen Cylinder vergleicht, so ergibt sich derselbe ohne Mühe, sowohl aus dem ersten Theile, als aus dem vorigen Satze. Hinsichtlich der Umschreibung der Kugel durch einen Cylinder verweisen wir auf IV., 43.

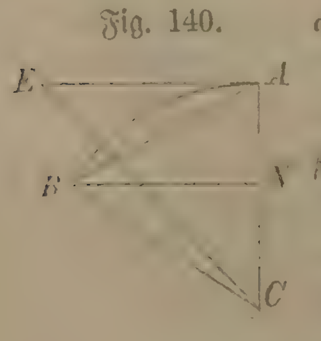
Zusatz 1. Ist r der Radius einer Kugel, so ist (IV., 45) die Oberfläche derselben $= 4\pi r^2$, mithin der Rauminhalt $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Mittels des Durchmessers $d = 2r$ ausgedrückt, ist derselbe Inhalt $= \frac{1}{6}\pi d^3$.

Zusatz 2. Zwei Kugeln verhalten sich ihrem Rauminhalte nach wie die Cuben ihrer Radien.

Zusatz 3. Vergleicht man Zusatz 3 in IV., 45 mit dem zweiten Theile dieses Satzes, so ergibt sich, daß eine Kugel und ein ihr umgeschriebener Cylinder sich ihrem Rauminhalte nach eben so zu einander verhalten, wie ihrer Oberfläche nach. Setzt man in den Cylinder noch einen Kegel von derselben Grundfläche und Höhe, so verhalten sich die drei Körper, Kegel, Kugel und Cylinder, wie 1 : 2 : 3. (Archimedischer Satz.)

7. Satz. Der durch Umwälzung eines Kreissectors (ABC) um einen seiner Grenzhalbmesser (z. B. AC) (Fig. 140) beschriebene Körper (Kugelsector, sphärischer Kegel) ist

Fig. 140.



α) einem Kegel gleich, dessen Basis der Kugelkappe gleichkommt, welche den Sector begrenzt und Höhe der Radius ist.

β) Derselbe beträgt zwei Drittel eines Cylinders, dessen Basis einem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe der Höhe AN der genannten Kugelkappe gleich ist.

Die zum Beweise des vorigen Satzes gebrauchten Schlüsse gelten auch hier, wenn man ihnen den 2. Zusatz in Satz 5 zu Grunde legt. Man hat nur den Kreissector als einen Polygonsector zu betrachten und auf den von diesem beschriebenen Körper den genannten Zusatz anzuwenden.

Zusatz 1. Ist r der Radius der Kugel, $AN = h$ (Fig. 140) die Höhe der den Kugelsector begrenzenden Kappe, so ist dieser Sector $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Zusatz 2. Zieht man (Fig. 140) an A eine Tangente AE = der Sehne AB und verbindet E mit C, so ist der vom rechtwinkeligen Dreiecke AEC bei der Umdrehung um AC beschriebene Kegel so groß wie der vom Kreissector ABC beschriebene Kugelsector.

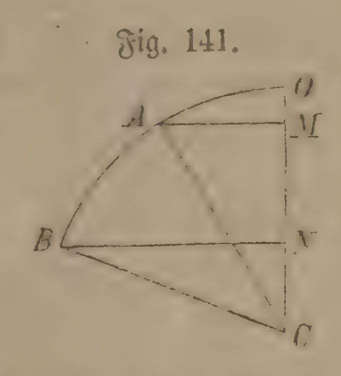


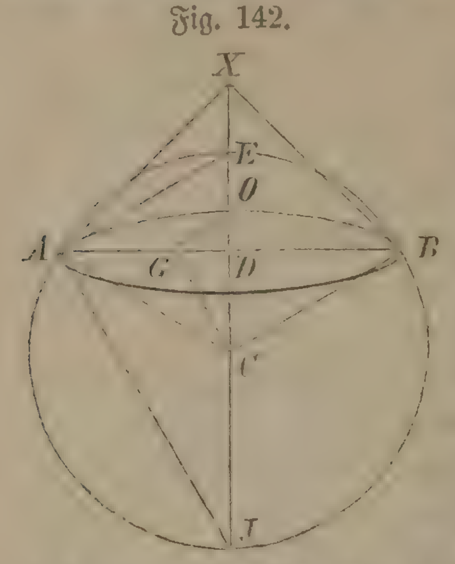
Fig. 141.

Zusatz 3. Dreht sich der Kreissector ABC (Fig. 141) um einen außer ihm liegenden Radius CO des Kreises, zu welchem er gehört, so ist der von ihm beschriebene Körper die Differenz der von BCO und ACO bei derselben Umdrehung beschriebenen Kugelsectoren und daher 1) einem Kegel gleich, dessen Höhe OC und dessen Basis der vom Bogen AB beschriebenen Zone gleich kommt, 2) ist derselbe Körper auch zwei Drittel eines Cylinders, dessen Basis ein größter Kreis der Kugel und dessen Höhe der Projection MN des Bogens AB auf der Achse gleich ist.

8. Erklärungen. Jeder der beiden Theile, in welche eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, ist ein Kugelabschnitt oder ein Kugelsegment, und von diesen beiden Segmenten läßt das eine sich immer als die Ergänzung des andern ansehen, zur ganzen Kugel nämlich. Geht die Ebene durch den Mittelpunkt, so sind beide Segmente Halbkugeln. In jedem anderen Falle sind sie ungleich. Beide Segmente haben eine gemeinschaftliche Basis, den Kreis nämlich, der beide trennt, und jedes von ihnen wird durch diese Basis und eine Kugelkappe begrenzt. Zieht man einen auf dieser Basis senkrechten Durchmesser der Kugel (er geht durch deren Mitte), so sind die zwischen seinen Endpunkten und der Mitte der Basis liegenden Theile dieses Durchmessers die Höhen der Segmente, jeder desjenigen, worin er liegt. Dieselbe Höhe kommt (IV., 46) den Kugelkappen zu, welche die Segmente begrenzen.

9. Satz. **Jedes Kugelsegment ist einem Kegel auf derselben Basis gleich, dessen Höhe die Höhe des Segmentes um die vierte Proportionale zur Höhe des ergänzenden Segmentes, der eigenen Höhe und dem Radius der Kugel übertrifft.** (Fig. 142.)

Fig. 142.



Beweis. Eine Kugel, deren Mittelpunkt C ist, werde von der Ebene AB in zwei Segmente getheilt. Zieht man den auf AB senkrechten Durchmesser EJ, welcher AB in D trifft, so ist ED die Höhe des Segmentes AEB, JD die des ergänzenden Segmentes AJB. Ueber dem Kreise AB, der gemeinschaftlichen Grundfläche beider Segmente, stehe ein dem Segmente AEB an Inhalt gleicher Kegel AXB. Damit diese Gleichheit Statt finde, muß der Doppelkegel $CAXB$ dem Kugelsector $CAEB$ gleich sein. Betrachtet man nun die diesen beiden Körpern nach 2, Zus. 3 und 7, Zus. 2 gleichen Kegel und berücksichtigt, daß bei gleichen Kegeln die Höhen sich umgekehrt wie die Quadrate der Radien ihrer Grundflächen verhalten müssen, so gelangt man alsbald zur Proportion $AE^2 : AD^2 = CX : CE$. Aber $AE^2 : AD^2 = EJ : DJ$, also muß $EJ : DJ = CX : CE$ sein, woraus weiter folgt, daß $DJ : DE = CE : EX$, d. h. EX, der Ueberschuß der Höhe des Kegels AXB über die des ihm gleichen Segmentes AEB, ist die vierte Proportionale zur Höhe DJ des ergänzenden Segmentes AJB, der Höhe DE des Segmentes AEB selbst und dem Radius der Kugel CE, w. z. b. w.*)

Die Construction des Kegels AXB ist leicht und durch die Figur hinreichend angedeutet; darin ist $CG \parallel JA$, $GO \parallel AE$, $EX = EO$.

Zusatz. Der einer Halbkugel gleiche Kegel hat den doppelten Radius zur Höhe.

10. Aufgabe. **Eine Formel für den Inhalt eines Kegelsegments aufzustellen, wenn gegeben ist entweder 1) dessen Höhe h, oder 2) der Abstand a seiner Grundfläche vom Centrum der Kugel, deren Radius $= r$ sei.**

---

*) Anm. Wir haben obige Schlußfolge gewählt, um das Beispiel eines analytischen Beweises zu geben, der zugleich als Lösung der Aufgabe gelten kann: Die Höhe des dem Segmente gleichen Kegels zu finden.

Auflösung zu 1. Ist die Höhe eines Segmentes $= h$, so ist die des ergänzenden $= 2r - h$; daher eine vierte Proportionale zu beiden und dem Kugelradius $= \frac{rh}{2r-h}$; hieraus folgt nach (9), daß die Höhe eines dem ersteren Segmente gleichen Kegels $= h + \frac{rh}{2r-h} = \frac{h(3r-h)}{2r-h}$. Die Grundfläche dieses Kegels findet sich $= \pi h(2r - h)$; daher ist der Kegel und also auch das Kugelsegment, dessen Höhe h, $= \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$.

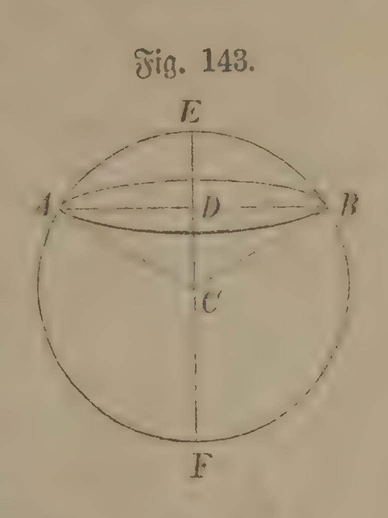


Fig. 143.

Diesen Ausdruck findet man auch direct, d. i. unabhängig von (9), auf folgende Weise: Ist das Segment, wie AEB, kleiner als die Halbkugel und seine Höhe $ED = h$, so ist dasselbe der Unterschied zwischen dem Kugelsector $AEBC = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ und dem Kegel $ACB = \frac{1}{3}\pi h(2r - h)(r - h)$, daher das Segment $AEB = \frac{1}{3}\pi h\,[2r^2 - (2r - h)(r - h)] = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$. Ist dagegen das Segment, wie AFB, größer als die Halbkugel und seine Höhe $FD = k$, so ist dasselbe die Summe aus dem Kugelsector $AFBC = \frac{2}{3}\pi r^2 k$ und demselben Kegel $ACB = \frac{1}{3}\pi k(2r - k)(k - r)$; daher das Segment $AFB = \frac{1}{3}\pi k\,[2r^2 + (2r - k)(k - r)] = \frac{1}{3}\pi k^2 (3r - k)$, wie vorher.

Auflösung zu 2. Ist statt der Höhe des Segmentes der Abstand $CD = a$ seiner Grundfläche AB vom Mittelpunkte C der Kugel gegeben, so ist $ED = h = r - a$, $FD = k = r + a$. Setzt man diese Werthe in die vorhergehenden Ausdrücke beider Segmente ein, so erhält man:

das kleinere Segment $AEB = \frac{1}{3}\pi\,(2r^3 - 3ar^2 + a^3)$,
das größere „ $AFB = \frac{1}{3}\pi\,(2r^3 + 3ar^2 - a^3)$.

11. Aufgabe. Den Inhalt des zwischen zwei Parallelkreisen begriffenen Kugelraums zu finden, wenn die Halbmesser dieser Kreise und ihr Abstand gegeben sind.

Auflösung. AD und BG (Fig. 144) seien zwei Parallelkreise auf der Kugel, welche nebst der zwischen ihnen liegenden Zone (IV., 46) einen Kugelraum $ABCD$ begrenzen. EF sei ein auf jenen Kreisen senkrechter Durchmesser;

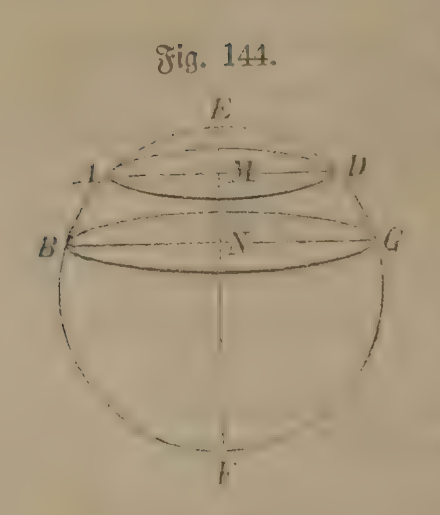
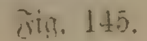


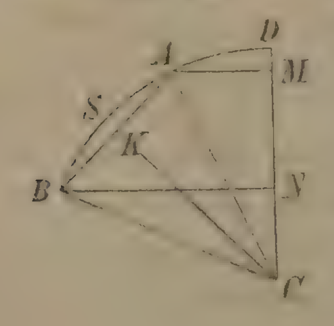
Fig. 144.

er geht durch die Mittelpunkt M und N derselben. Gegeben sind der Aufgabe gemäß: die Halbmesser der Parallelkreise $AM = MD = a$ und $BN = NG = b$, der Abstand ihrer Ebenen $MN = h$. Um aus diesen Stücken den Inhalt des Kugelraumes $ABGD$ zu finden, betrachte man diesen als den Unterschied der beiden Kugelsegmente AEB und BEG. Bezeichnet man die Höhe EM der ersten derselben mit x, die der andern EN mit y, so ist das Segment $AED = \frac{1}{3}\pi x^2 (3r - x)$, das Segment $BEG = \frac{1}{3}\pi y^2 (3r - y)$, außerdem $y - x = h$. Durch Subtraction dieser Ausdrücke von einander, erhält man: Raum $ABGD = \frac{1}{3}\pi\,[3r\,(y^2 - x^2) - (y^3 - x^3)]$, oder, da $y - x = h$, derselbe Raum $= \frac{1}{3}\pi h\,[3r\,(y + x) - (y^2 + xy + x^2)]$. Aber $a^2 = x\,(2r - x)$, $b^2 = y\,(2r - y)$, daher $a^2 + b^2 = 2r(x + y) - (x^2 + y^2)$, folglich $r(x + y) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Substituirt man diesen letzteren Werth, so kommt: Raum $ABGD = \pi h\,[\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}(x^2 + xy + y^2)] = \pi h\,[\frac{1}{2}\,(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\,(x^2 - 2xy + y^2)] = \pi h\,[\frac{1}{2}\,(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}h^2]$. Die geometrische Deutung dieses Ausdruckes ist: Der zwischen zwei Parallelkreisen und einer Kugelzone enthaltene Körper ist der halben Summe zweier Cylinder gleich, deren Grundflächen jene Kreise sind und deren Höhe ihrem Abstande gleich kommt, nebst einer Kugel, deren Durchmesser dieser Abstand ist.

Zusatz. Ist $a = o$, so geht der Körper in ein Kugelsegment über, dessen Inhalt $= \frac{1}{6}\,\pi h\,(3b^2 + h^2)$ ist.

12. Aufgabe. Ein Kreissegment drehe sich um einen außer ihm liegenden Halb- oder Durchmesser des Kreises, wozu dasselbe gehört; den Rauminhalt des von ihm beschriebenen ringförmigen Körpers zu finden. (Fig. 145.)


Fig. 145.



Auflösung. Das Segment ASB drehe sich um den Halbmesser CD seines Kreises. Da dasselbe den Ueberschuß des Kreissectors $ASBC$ über das gleichschenkelige Dreieck ABC bildet, so ist auch der vom Segmente ASB bei der Umdrehung um CD beschriebene Körper der Unterschied der vom

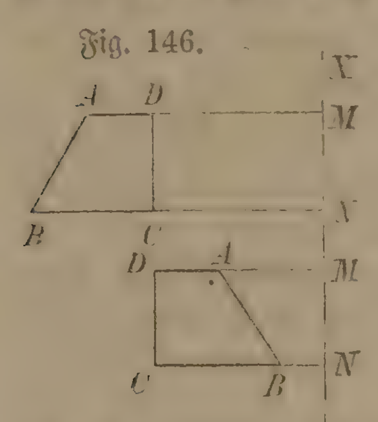
genannten Kreissector und vom Dreiecke ABC beschriebenen. Der erste dieser beiden ist nach S. 7, Zus. 3 $= \frac{2}{3}\pi \cdot CA^2 \cdot MN$, der zweite nach S. 4, Zusatz $= \frac{2}{3}\pi \cdot CK^2 \cdot MN$, wo CK den Abstand der Sehne AB vom Mittelpunkte bezeichnet. Der Unterschied beider, d. i. der vom Segmente ASB beschriebene Ring, ist also $= \frac{2}{3}\pi\ (CA^2 - CK^2)\ MN = \frac{2}{3}\pi \cdot AK^2 \cdot MN = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot MN$, d. h. der Ring beträgt zwei Drittel eines Cylinders, dessen Grundfläche die Sehne AB (Breite des Ringes) zum Durchmesser hat und dessen Höhe der Höhe MN des Ringes gleich ist.

Zusatz. Ist $AB \parallel CD$, so ist $MN = AB$, der Ring also $= \frac{1}{6}\pi \cdot AB^3$, d. i. einer Kugel gleich, deren Durchmesser AB ist.

Bemerkung. Man suche dieselben Resultate durch Abzug des abgekürzten Kegels $ABNM$ von dem Kugelraume $ASBNM$ (11) zu gewinnen.

13. **Aufgabe.** **Ein Trapez, von welchem eine Seite auf zweien anderen senkrecht steht, drehe sich um eine jener Seite parallele Achse; den Inhalt des von ihm beschriebenen ringförmigen Körpers zu finden.**

Fig. 146.



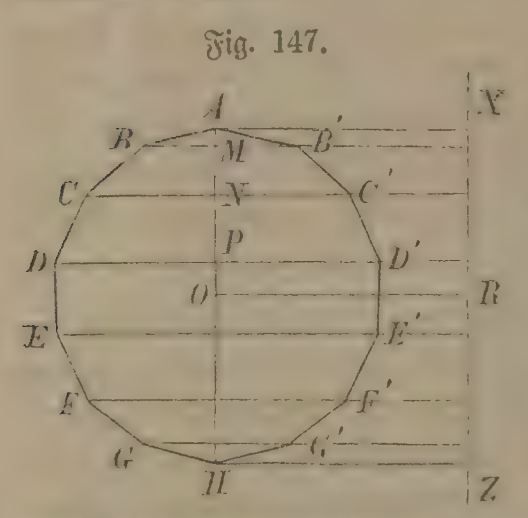
Auflösung. Das Trapez sei $ABCD$, darin $AD \parallel BC$, DC aber senkrecht gegen AD und BC. Die der CD parallele Achse sei XZ und diese werde von den Verlängerungen der Parallelseiten AD und BC in M und N getroffen. Zur Abkürzung sei die Seite $AD = a$, $BC = b$, die Höhe $DC = MN = h$, der Abstand der Seite CD von der Achse oder $DM = CN = r$; der Inhalt des Trapezes sei $t = \frac{1}{2}(a + b)\,h$. Bei der Umdrehung um die Achse XZ beschreibt das Trapez $AMNB$ einen abgekürzten Kegel, dessen Inhalt, wenn DC zwischen dem Trapez $ABCD$ und der Achse liegt, nach (3) $= \frac{1}{3}\pi h\ [(a + r)^2 + (b + r)^2 + (a + r)\ (b + r)]$, wenn aber Trapez $ABCD$ und Achse auf einerlei Seite von CD liegen, $= \frac{1}{3}\pi h\ [(r - a)^2 + (r - b)^2 + (r - a)\ (r - b)]$. Das Rechteck $DCNM$ beschreibt jedenfalls einen Cylinder $= \pi h r^2$. Daher ist der vom Trapeze $ABCD$ beschriebene Ring im erstgenannten Falle $= \frac{1}{3}\pi h\ [(a + r)^2 + (b + r)^2 + (a + r)\ (b + r) - 3r^2] = \frac{1}{3}\pi h\ [(3r\ (a + b) + a^2 + b^2 + ab] = 2\pi r t + \frac{1}{3}\pi h\ (a^2 + b^2 + ab)$; im zweiten Falle ist der Ring $= \frac{1}{3}\pi h\ [3r^2 - (r - a)^2 - (r - b)^2 - (r - a)\ (r - b)] = \frac{1}{3}\pi h\ [3r\ (a + b) - a^2 - b^2 - ab] = 2\pi r t - \frac{1}{3}\pi h\ (a^2 + b^2 + ab)$. In diesen beiden Ausdrücken bezeichnet $2\pi r t$ den Inhalt eines Prisma, dessen Grundfläche das

Trapez $ABCD$ oder t ist und dessen Höhe der mit dem Abstande r als Radius beschriebenen Kreisperipherie gleich kommt; das zweite Glied $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + b^2 + ab)$ bezeichnet denjenigen abgestumpften Kegel, welchen das Trapez $ABCD$ beschreiben würde, wenn dasselbe sich um CD als Achse drehte. Der von $ABCD$ beschriebene Ring ist also in dem einen der zwei betrachteten Fälle die Summe, in dem andern die Differenz dieser beiden Körper.

Zusatz. Das Resultat der Auflösung bleibt richtig, auch wenn eine der Parallelseiten des Trapezes $= 0$ wird oder das Trapez in ein Dreieck übergeht.

14. Satz. Der durch Umdrehung eines regulären Polygons von gerader Seitenzahl $ABC \ldots H \ldots B'A$ um eine dem Durchmesser AH desselben parallele Achse XZ beschriebene Ringkörper ist so groß als ein über dem Polygon errichtetes Prisma, dessen Höhe der vom Centrum O desselben um die Achse beschriebenen Kreisperipherie gleich ist. Dabei übertrifft der äußere vom Halbpolygon $ABC \ldots HA$ beschriebene Theil des Ringes den inneren vom Halbpolygon $AB'C' \ldots HA$ beschriebenen um das Doppelte des bei der Umdrehung des Halbpolygons um AH als Achse erzeugten Körpers.

Fig. 147.



Der Beweis dieses Satzes erfordert nur eine Anwendung des vorhergehenden auf die verschiedenen Trapeze, in welche das Polygon durch die parallelen Diagonalen BB', CC', $DD' \ldots$ und den darauf senkrechten Durchmesser AH getheilt wird. Bezeichnet man den von einem solchen Trapeze, wie von $BCNM$, bei der Umdrehung um XZ als Achse beschriebenen ringförmigen Körper durch $\mathfrak{R}\,(BCNM)$, den von demselben Trapeze durch seine Umdrehung um MN oder AH beschriebenen abgestumpften Kegel durch $\mathfrak{K}\,(BCNM)$, ferner die vom Mittelpunkte O des Polygones bei der Umdrehung um XY beschriebene Kreisperipherie, deren Radius OR ist, mit p, so hat man nach der Auflösung in voriger Nummer:

$$\mathfrak{R}\,(ABM) = p \cdot ABM + \mathfrak{K}\,(ABM)$$
$$\mathfrak{R}\,(BMNC) = p \cdot BMNC + \mathfrak{K}\,(BMNC)$$
$$\mathfrak{R}\,(CNPD) = p \cdot CNPD + \mathfrak{K}\,(CNPD) \text{ u. s. w.}$$

Die Summation dieser Gleichungen ergibt, daß der vom Halbpolygone $ABC\,..\,H$ um XZ als Achse beschriebene ringförmige Körper gleich ist einem Prisma über diesem Halbpolygone von der Höhe p nebst demjenigen Körper, welchen das Halbpolygon beschreiben würde, wenn es sich um den Durchmesser AH drehte. Ganz auf gleiche Weise wird gezeigt, daß der vom Halbpolygone $AB'C'\,..\,H$ um XZ als Achse beschriebene ringförmige Körper gleich ist einem Prisma über diesem nämlichen Halbpolygone von der Höhe p, vermindert um den von dem Halbpolygone bei seiner Umdrehung um AH beschriebenen Körper. Hieraus folgen unmittelbar beide Theile des Satzes.

Zusatz. Ist die Seitenzahl des Polygons $= n$, eine dieser Seiten $= a$, seine Apotheme $= \varrho$, der Radius des ihm umgeschriebenen Kreises $= r$, also $r^2 = \varrho^2 + \frac{1}{4}a^2$, der Abstand des Mittelpunktes von der Achse $= d$, so ist der vom Polygon beschriebene Ringkörper $= n\pi a d\varrho$, der Ueberschuß des äußeren Theiles über den inneren $= \frac{8}{3}\pi\varrho^2 r$. — Man wende diese Formeln auf die Fälle an, wo $n = 4, 6, 8, 10$.

15. **Satz.** **Der von einem Kreise bei der Umdrehung um eine in seiner Ebene, aber ganz außer ihm liegende, Achse beschriebene Ring ist an Inhalt einem Cylinder gleich, dessen Grundfläche der Kreis ist und dessen Höhe der vom Mittelpunkte beschriebenen Peripherie gleich kommt. Dabei übertrifft der äußere Theil des Ringes den inneren** (beide sind durch denjenigen Cylindermantel getrennt, welchen der der Achse parallele Durchmesser des Kreises beschreibt) **um das Doppelte einer Kugel, welche denselben Radius wie der Kreis hat.**

Dieser Satz folgt sogleich aus dem vorhergehenden, wenn man den beschreibenden Kreis als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten ansieht. Bezeichnet also r den Radius des Kreises, d den Abstand seines Mittelpunktes von der Achse, so ist der vom Kreise um diese Achse beschriebene Ring $= 2\pi d \cdot \pi r^2$, der von d unabhängige Ueberschuß des äußeren Theiles A über den innern $B = \frac{8}{3}\pi r^3$, mithin $A = \pi r^2(\pi d + \frac{4}{3}r)$, $B = \pi r^2(\pi d - \frac{4}{3}r)$. Ist $d = r$, so wird $A = \pi r^3(\pi + \frac{4}{3})$, $B = \pi r^3(\pi - \frac{4}{3})$; der Ring $A + B = 2\pi^2 r^3$.

Zweiter Theil
als Anhang zu den Elementen der Stereometrie.

Anhang I.

Anfangsgründe der Projectionslehre (der beschreibenden Geometrie). Die Projectionen der regulären Polyeder.

1. Vorbegriffe. Denkt man sich im Raume zwei feste, auf einander senkrecht stehende, Ebenen, so ist die Lage eines Punktes im Raume bestimmt, wenn dessen Projectionen in den beiden Ebenen bestimmt sind. Wir nennen die festen Ebenen Projectionsebenen, und zwar die eine die erste Projectionsebene oder auch die Horizontalebene (P_1), die andere die zweite Projectionsebene oder auch die Verticalebene (P_2). Der Durchschnitt beider Ebenen wird Projectionsachse genannt. Zuweilen ist es von Vortheil, noch eine dritte Projectionsebene (P_3) einzuführen, welche alsdann auf einer der ersten Projectionsebenen senkrecht steht.

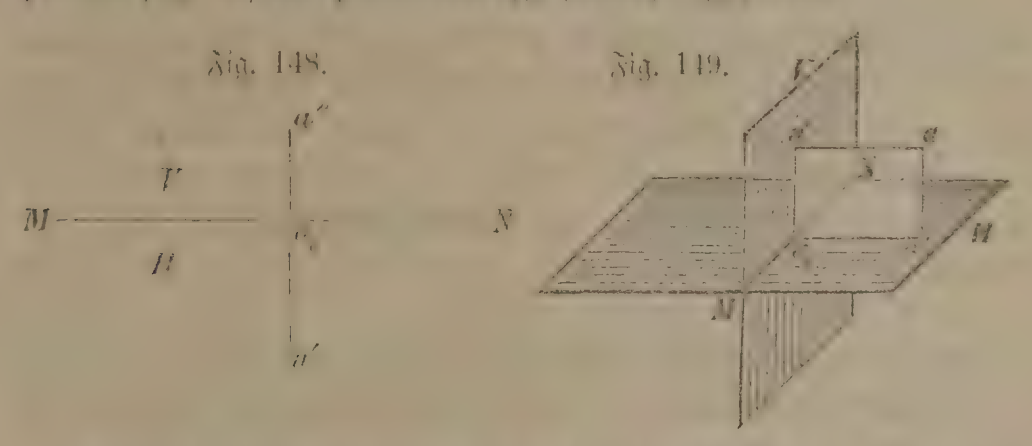
Ein Punkt a im Raume ist gegeben durch seine beiden Projectionen. Man bezeichnet die erste oder Horizontalprojection mit a', die zweite oder Verticalprojection mit a''.

Eine gerade oder krumme im Raume gelegene Linie ist im Allgemeinen gegeben durch die Projectionen (I., 24) auf den beiden festen Projectionsebenen. Ist die krumme Linie eine Linie einfacher Krümmung, so ist dieselbe nur in dem Falle nicht bestimmt, wenn ihre Ebene auf der Projectionsachse, also auch auf beiden Projectionsebenen, senkrecht steht; dasselbe gilt von einer geraden Linie, die auf der Projectionsachse senkrecht steht.

Eine gerade Linie ist auch der Lage nach bestimmt, wenn die beiden Durchschnittspunkte derselben mit den festen Projectionsebenen bekannt sind. Die Durchschnittspunkte führen den Namen Spuren oder Risse. Eine Ebene ist der Lage nach gegeben, wenn ihre Durchschnitte mit den Projectionsebenen gegeben sind, den Fall ausgenommen, wo die Ebene durch die Projectionsachse geht. In diesem Falle bedarf es noch einer dritten Projectionsebene. Die Durchschnitte der Ebene mit den Projectionsebenen führen gleichfalls den Namen Spuren oder Risse (traces).

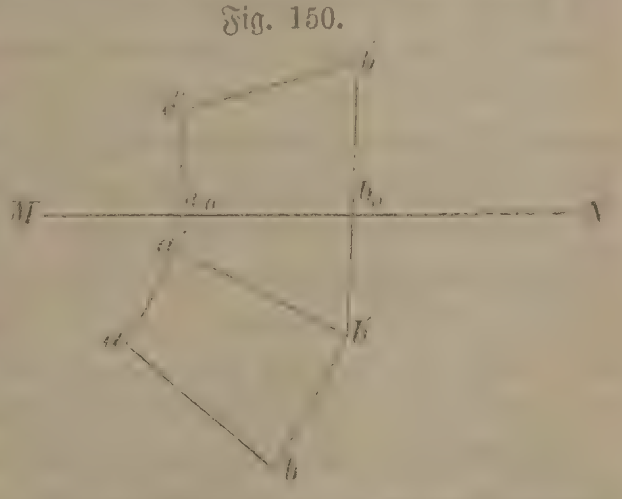
Methode der beschreibenden Geometrie. Zur Zeichnung der Projectionen auf ein und demselben Blatte, also in ein und derselben Ebene, denkt man sich die Verticalebene um einen rechten Winkel so um die Projectionsachse gedreht, daß sie mit der Horizontalebene in eine Ebene zusammenfällt. Diese Operation nennt man das Umklappen. Derjenige Theil der Geometrie, in welchem alle im Raume gedachten Constructionen mit Hülfe der Projectionen und Risse in einer einzigen Ebene ausgeführt werden, heißt beschreibende Geometrie (Géometrie descriptive). Die nachfolgenden Elementarsätze der Projectionen beziehen sich auf die durch Umklappen zusammengestellten Projectionsebenen.

2. Satz. Die Verbindungslinie $a'a''$ der beiden Projectionen eines Punktes steht auf der Projectionsachse senkrecht. (Fig. 148.)



Beweis. Der Beweis ergibt sich leicht aus der Betrachtung der Fig. 149, wo a einen Punkt im Raume, a' und a'' dessen Projectionen bedeuten. Die durch $a''aa'$ gelegte Ebene $aa''a_0a'$ steht auf der Projectionsachse senkrecht u. s. w.

Welche Lage werden die Punkte a' und a'' nach der Umklappung haben, wenn der Punkt a im Raume unterhalb der Horizontalebene liegt, oder an der linken Seite der Verticalebene (Fig. 149) liegt? welche, wenn der Punkt in einer der Projectionsebenen selbst liegt?

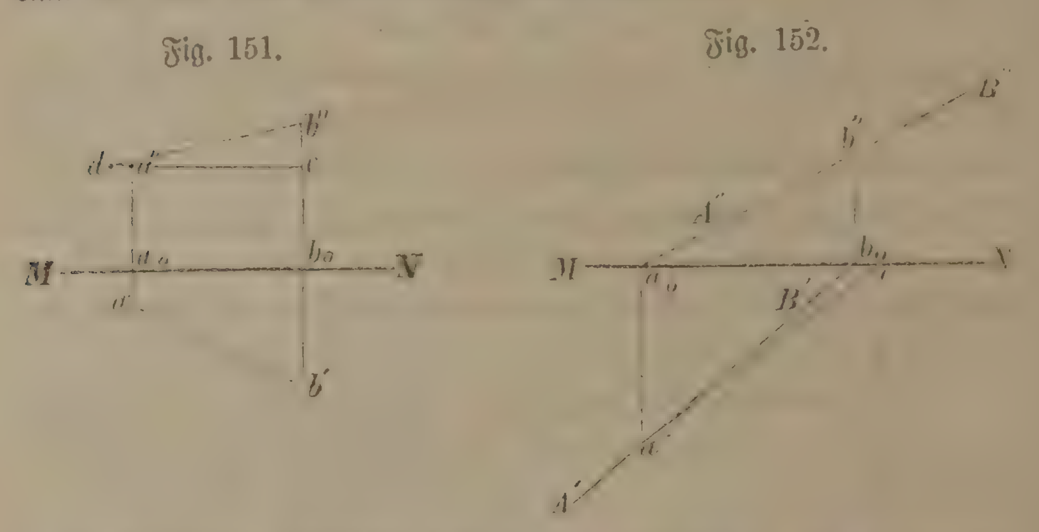


3. Aufgabe. Gegeben seien zwei Punkte a und b durch die Projectionen a', a'' und b', b'' (Fig. 150 und 151), die Entfernung der im Raume liegenden Punkte durch eine ebene Construction zu finden.

1. Auflösung. (Fig. 150.) Man ziehe $a'a''$, $b'b''$, $a'b'$ und $a''b''$, errichte auf $a'b'$ in a' die Senkrechte $a'a = a''a_0$, und in b' die Senkrechte $b'b = b''b_0$, und verbinde a mit b, wodurch man die verlangte Entfernung ab erhalten wird.

2. Auflösung. Man ziehe (Fig. 151) durch a'' mit der Projectionsachse MN die Parallele $a''c$, mache $cd = b'a'$ und verbinde d mit b''; die Linie db'' wird alsdann die verlangte Entfernung sein.

Fig. 151. Fig. 152.



4. Aufgabe. **Gegeben eine gerade Linie durch ihre Projectionen, die Durchschnittspunkte der Linie mit den Projectionsebenen — die Spuren — zu construiren, so wie die Länge der begrenzten Linie anzugeben.**

Auflösung. $A'B'$ und $A''B''$ (Fig. 152) seien die beiden Projectionen der Linie. Die Horizontalspur der Linie hat zur Verticalprojection einen Punkt, der auf MN liegt und da dieselbe auch auf $A''B''$ liegen muß, so liegt sie im Durchschnitte a_0 der $A''B''$ mit MN. Dem Punkte a_0 entspricht aber der Punkt a, auf $A'B'$, wenn man $a_0a' \perp MN$ zieht, der also die verlangte Horizontalspur ist. Errichtet man ferner im Punkte b_0 auf MN die b_0b'' senkrecht, so ist b'' die verlangte Verticalspur der durch ihre Projectionen $A'B'$ und $A''B''$ gegebenen geraden Linie. Macht man $a_0c = a_0b''$ und zieht $a'c$, so ist $a'c$ die verlangte Länge der begrenzten geraden Linie.

1. Zusatz. $(a'c)^2 = (a'a_0)^2 + (b''b_0)^2 + (a_0b_0)^2$.

2. Zusatz. Die Spuren einer Geraden sind gegeben, die Projectionen der Geraden durch eine ebene Construction zu finden.

3. Zusatz. Die Winkel zu construiren, welche die gegebene Linie mit den beiden Projectionsebenen macht.

4. Zusatz. Den Winkel zu construiren, welchen die gegebene Linie mit der Projectionsachse macht.

Man construire ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Länge der begrenzten Geraden ($a'c$ Fig. 152) und dessen eine Kathete die Linie $a_{,,}b_{,,}$ ist. Der Winkel, den die Hypotenuse mit dieser Kathete macht, ist der verlangte Winkel.

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

5. Aufgabe. Die Eigenschaften der Projectionen a) zweier Parallellinien, b) zweier sich im Raume durchschneidenden Linien, c) zweier windschiefen Linien zu untersuchen.

Auflösung. Bei a) kommt I., 43 in Anwendung, bei b) Satz 3 dieses Anhanges I. — Können wohl zwei gerade Linien im Raume in der einen Projectionsebene Parallellinien, in der andern convergirende Linien zur Projection geben?

Zusatz. Gegeben die Projectionen einer geraden Linie und eines Punktes. Durch den gegebenen Punkt eine Linie parallel mit der gegebenen Linie zu ziehen.

6. Aufgabe. Den Winkel zu construiren, welchen zwei gegebene sich durchschneidende gerade Linien I und II im Raume mit einander bilden.

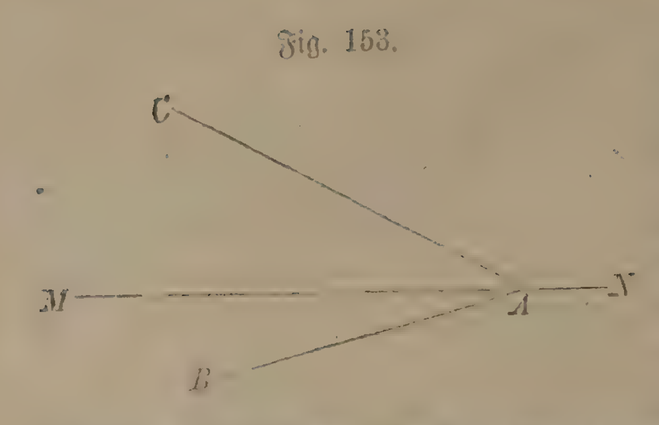
Auflösung. a', a'' seien die Projectionen des Durchschnittspunktes a der beiden Linien I und II im Raume. Man wähle auf den Projectionen von I zwei beliebige entsprechende Punkte b' und b'' als Projectionen eines beliebigen auf I gelegenen Punktes b; eben so wähle man auf den Projectionen der Linie II beliebige entsprechende Punkte c' und c'' als Projectionen eines beliebigen Punktes c der Linie II. Construirt man nun nach 3 die Entfernungen ab, ac und bc der im Raume liegenden Punkte a, b und c und bildet mit diesen Linien ein Dreieck abc, so ist der Winkel a der verlangte Winkel.

Zusatz. Den Winkel zu construiren, den zwei windschiefe Linien mit einander machen.

7. Satz. Die beiden Risse BA und AC einer Ebene (Fig. 153) treffen entweder mit der Projectionsachse MN in einem Punkte zusammen, oder sie sind beide mit der Projectionsachse parallel.

Der Beweis folgt unmittelbar aus I., 6.

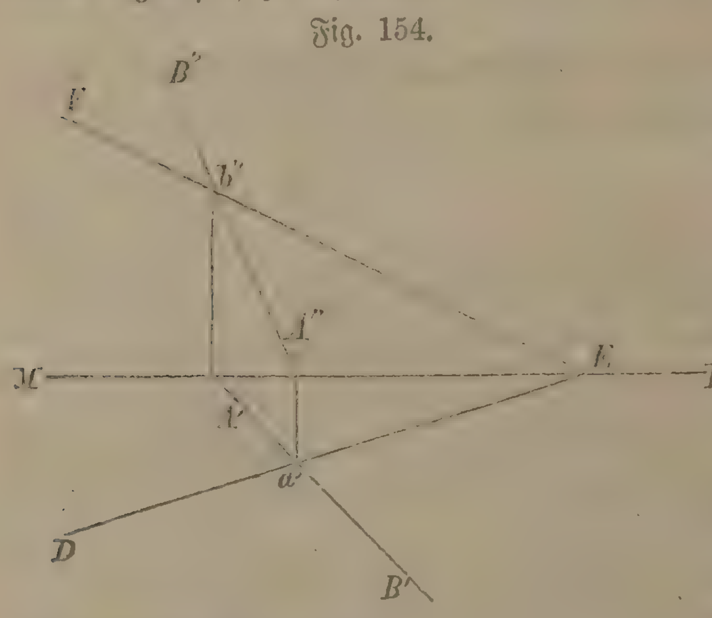
Fig. 153.



Zusatz. Steht eine Ebene senkrecht auf der Horizontalebene, so steht ihr Verticalriß, und steht die Ebene senkrecht auf der Verticalebene, so steht ihr Horizontalriß senkrecht auf der Projectionsachse. Steht eine Ebene senkrecht auf der Achse, so stehen auch beide Risse senkrecht auf der Achse. Liegt eine Ebene parallel mit der Horizontalebene oder mit der Verticalebene, so hat sie nur einen Riß, und dieser ist der Achse parallel.

8. Aufgabe. Die Eigenschaften einer geraden Linie, welche in einer Ebene liegen soll, zu bestimmen.

Fig. 154.



Aufl. Es seien $A'B'$ und $A''B''$ (Fig. 154) die Projectionen der gegebenen Linie, DE und EF die Risse einer Ebene. Construirt man nach 4 die Durchschnittspunkte a' und b'' der gegebenen Linie mit den beiden Projectionsebenen, so müssen diese Punkte auf den Rissen ED und EF der gegebenen Ebene liegen.

Der Beweis leicht.

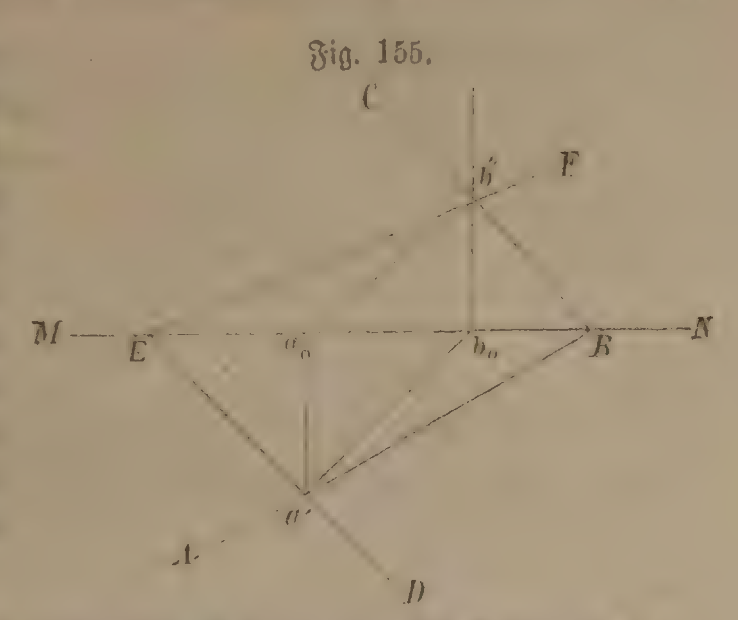
Zusatz. Bekannt seien der Verticalriß einer Ebene und die Projectionen einer in der Ebene liegenden Geraden, den Horizontalriß der Ebene zu finden.

9. Aufgabe. Die Durchschnittslinie zweier gegebenen Ebenen durch ebene Construction zu finden.

Auflösung. ABC und DEF (Fig. 155) seien die Risse der beiden gegebenen Ebenen. Der Durchschnittspunkt a' der Risse DE und AB ist

offenbar die Horizontalspur der verlangten Durchschnittslinie, so wie der Durchschnittspunkt b'' der Risse BC und EF die Verticalspur derselben. Mit Hülfe von 4, Zus. 2 erhält man leicht die Projectionen $a'b_0$ und $b''a_0$ der verlangten Durchschnittslinie.

Fig. 155.

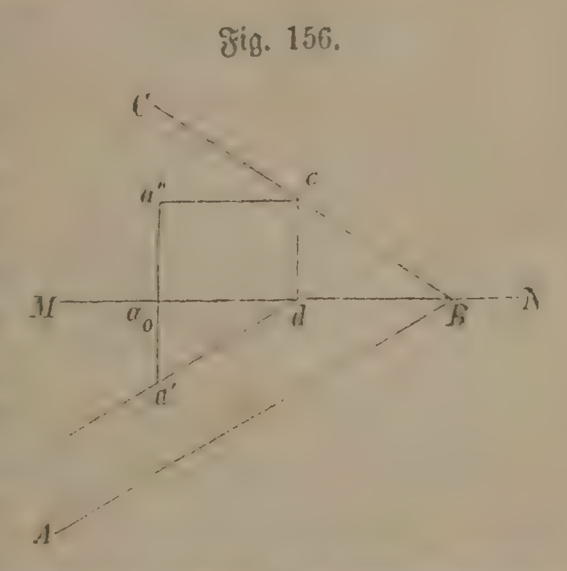


Zusatz. Den Durchschnittspunkt dreier gegebenen Ebenen zu finden.

10. Aufgabe. Die Eigenschaften eines Punktes zu finden, der in einer gegebenen Ebene enthalten ist.

Auflösung. AB und BC (Fig. 156) seien die Risse einer Ebene, a' und a'' die Projectionen eines Punktes a im Raume. Denkt man sich durch diesen Punkt a eine Linie parallel mit dem Horizontalrisse AB gelegt, so wird diese Linie ganz in der Ebene enthalten sein, also den Verticalriß BC in einem bestimmten Punkte treffen. Die Horizontalprojection der durch a mit AB parallel gelegten Linie erhält man,

Fig. 156.



wenn man durch a' mit AB die Parallele $a'd$ zieht, die Verticalprojection derselben Linie aber, wenn man durch a'' mit MN die Parallele $a''c$ zieht. Durchschneidet die erstere Projection die MN in d, die zweite den Riß BC in c, so muß, wie leicht einzusehen, d Projection des Punktes c sein; die Verbindungslinie dc der Punkte d und c muß also auf MN senkrecht stehen.

Oder: Denkt man sich (Fig. 157) durch einen Punkt d des Verticalrisses und den gegebenen Punkt a im Raume eine Gerade gelegt, so wird

Fig. 157.



dieselbe ganz in der Ebene enthalten sein und somit den Horizontalriß in einem Punkte c schneiden. Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Eigenschaft der nebenstehenden Figur, wo BA und BC die Risse der gegebenen Ebene, a' und a'' die Projectionen des Punktes bedeuten.

11. Aufgabe. Die Eigenschaften zweier Parallelebenen zu finden.

12. Aufgabe. **Durch einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen Ebene eine Parallelebene zu legen.**

Die Auflösung stützt sich auf 10 und 11.

13. Aufgabe. **Durch zwei gegebene sich durchschneidende gerade Linien eine Ebene zu legen.**

Man bestimme zuerst nach 4 die Durchschnitte der Geraden mit den Projectionsebenen, hieraus ergeben sich die Risse der verlangten Ebene.

Zusatz. Durch drei gegebene Punkte eine Ebene zu legen.

14. Aufgabe. **Gegeben die Projectionen einer geraden Linie und die Risse einer Ebene, die Projectionen des Durchschnittspunktes der Linie und der Ebene zu finden.**

Es heiße die gegebene Linie im Raume pq, ihr Durchschnitt mit der gegebenen Ebene a. Um die Horizontalprojection a' und die Verticalprojection a'' zu finden, denke man sich die Linie pq auf die Horizontalebene projicirt; die projicirende Ebene wird die gegebene Ebene in einer Geraden schneiden, welche mit der gegebenen Geraden pq gleiche Horizontalprojection $p'q'$ hat und deren Verticalprojection sich leicht aus Figur 157 in 10 ergibt, ist jene be, so ist diese de. Aus dem Durchschnitte der letzteren Linie mit der gegebenen Verticalprojection ergibt sich a'' und hieraus a'.

15. **Satz. Steht eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht, so stehen ihre Projectionen auf den entsprechenden Rissen dieser Ebene senkrecht.**

Mit Hülfe von I., 50 läßt sich nachweisen, daß die von der gegebenen Linie auf die Horizontalebene senkrecht gefällte Ebene (die projicirende Ebene) auf dem Horizontalrisse senkrecht steht. Es steht somit die Horizontalprojection der Geraden auf dem Horizontalrisse, so wie die Verticalprojection auf dem Verticalrisse senkrecht.

Zusatz. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen und die Länge der Senkrechten zu bestimmen.

16. **Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche auf einer gegebenen geraden Linie senkrecht steht.**

Leicht mit Hülfe des Vorhergehenden.

17. **Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene gerade Linie eine senkrechte Linie zu fällen.**

Auflösung. Man lege durch den gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht auf die gegebene Linie (16), bestimme den Durchschnitt dieser senkrechten Ebene mit der gegebenen Geraden (14) und verbinde den Durchschnitt mit dem gegebenen Punkte.

Die vorstehenden Elementar-Aufgaben mögen einen Begriff von der beschreibenden Geometrie geben. Das Ausführliche sehe man in den Werken von Monge, dem Begründer dieses Theils der Geometrie, und Anderer nach.

Einiges über die Projection der regulären Polyeder, nebst Bestimmung der Neigungswinkel ihrer Grenzflächen.

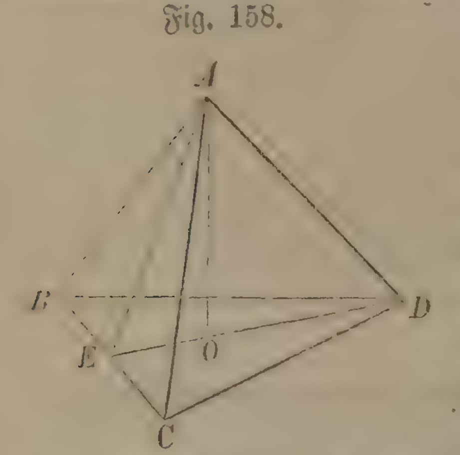
18. Die Projection der fünf regulären Polyeder hängt, wie natürlich, bei jedem einzelnen derselben von dessen besonderer Bildungsweise und Beschaffenheit ab. Für das Tetraeder, Hexaeder und Octaeder ist diese Bildungsweise nach dem, was darüber in III., 41—43 angegeben worden, so einfach, daß auch die Projection dieser Körper, selbst wenn die Lage derselben gegen die Projectionsebene ganz im Allgemeinen gelassen wird, keinerlei

Schwierigkeiten unterliegt, da sie nur eine Anwendung des Vorhergehenden erfordert. Was die Neigung ihrer Grenzflächen*) betrifft, so ist dieselbe

1. beim Hexaeder oder Cubus = R oder 90°;

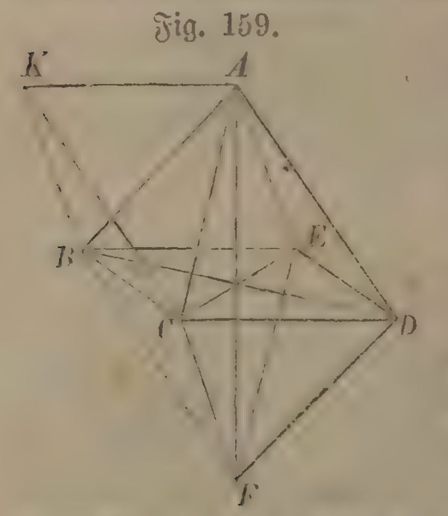
2. beim Tetraeder ist sie dem Winkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreieckes gleich, dessen Grundlinie sich zu einer der beiden übrigen Seiten wie die Seite eines gleichseitigen Dreieckes zu dessen Höhe, also wie $2 : \sqrt{3}$, verhält. Denn ist $ABCD$ ein reguläres Tetraeder, E die Mitte einer Kante BC, so sind, wenn man E mit A und D verbindet, EA und ED auf BC senkrecht; AED ist daher der Neigungswinkel der Grenzflächen ABC und DBC, AED das in Rede stehende gleichschenkelige Dreieck. — Fällt man in diesem Dreiecke $AO \perp ED$, so ist (Plan. II., 53) $EO = \frac{1}{3} ED$, also auch $EO = \frac{1}{3} EA$. Der Neigungswinkel AED ist daher auch so beschaffen, daß die Projection eines seiner Schenkel auf den anderen $\frac{1}{3}$ des ersteren beträgt. Den trigonometrischen Tafeln zufolge ist ein solcher Winkel = 70° 31′ 43″, 6, nahe $70\frac{1}{2}$ Grade.

Fig. 158.



3. Nach dem Neigungswinkel des Tetraeders ist es leicht, den des Octaeders zu bestimmen; dieser ist nämlich das Supplement des ersteren, oder beide ergänzen sich zu $2R$. Zum Beweise ergänze man (Fig. 159) eine Grenzfläche BCF des regulären Octaeders $ABCDEF$ zu einem Rhombus $BFCK$ und verbinde K mit A. Leicht ist dann zu zeigen, daß $KABC$ ein reguläres Tetraeder ist. Da BCK und BCF eine Ebene bilden, so ergänzen die Flächenwinkel, welche ABC mit KBC und FBC bilden, einander zu $2R$. Der Neigungswinkel beim Octaeder ist daher = 180° — 70° 31′ 43″, 6 = 109° 28′ 16″, 4.

Fig. 159.



4. Projection des Dodecaeders. 1. Wenn zwei Grenzflächen desselben einer der Projectionsebenen, etwa der horizontalen, parallel sind.

*) Man vergleiche über die Neigungen der Grenzflächen der Polyeder: Lehrbuch der Geometrie. Dritter Theil. XII., 20.

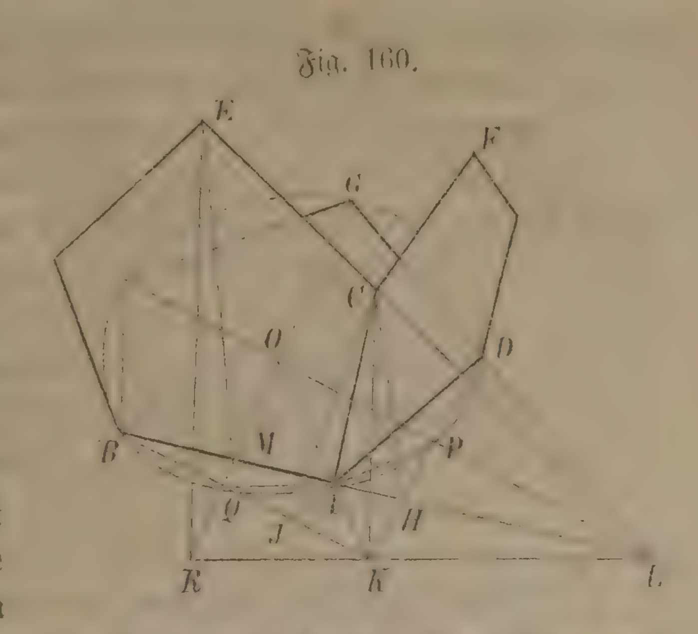


Fig. 160.

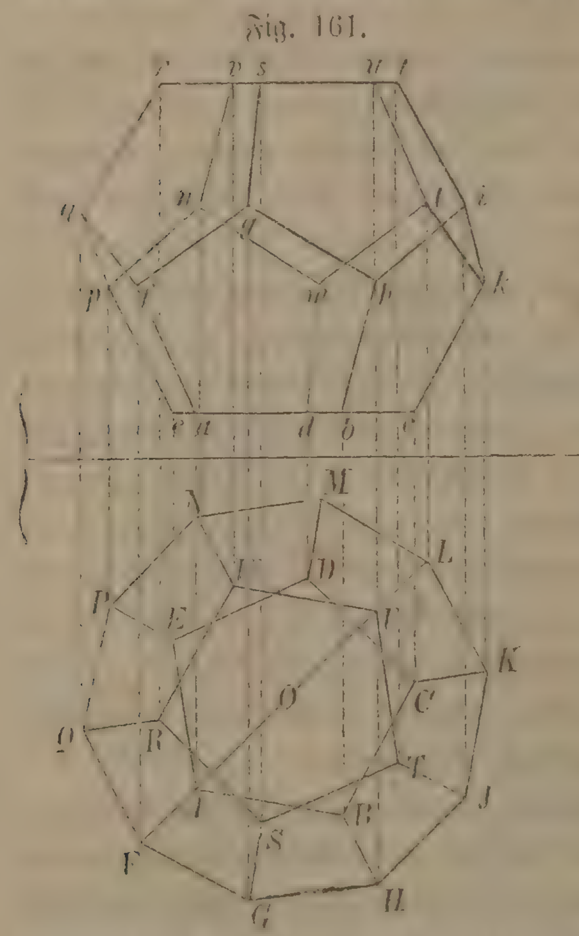
$ABEC$, $ADFC$ und $ABGD$ (Fig. 160) seien drei zur Körperecke eines Dodekaeders vereinigte reguläre Pentagone, also jeder der Winkel BAC, CAD und $BAD = \frac{6}{5} R$. Um eines der zwei ersten Pentagone, etwa $ABEC$, auf die Ebene des dritten ABG zu projiciren, kommt es nur darauf an, die Projectionen zweier Ecken desselben, wie C und E und die Höhen dieser Punkte über der Ebene ABG zu bestimmen.

Was zunächst die Projection von C angeht, so fälle man, um sie zu erhalten, von B und D auf die Verlängerungen von DA und BA die Perpendikel BJ und DH; der Punkt K, in welchem diese verlängert zusammentreffen, wird die Projection von C sein. Denn da $\sphericalangle\, DAH = CAH = \frac{4}{5} R$, so ist $\triangle\, DAH \cong CAH$; eben so ist $\triangle\, BAJ \cong CAJ$, darum $CH \perp AH$ und $CJ \perp AJ$. Hieraus folgt aber, daß die Ebenen CHK und CJK beide auf der Ebene des Pentagons ABG senkrecht stehen; mithin ist auch ihr Durchschnitt CK auf dieser Ebene senkrecht, oder K ist die Projection von C, AK die von AC. Da $\sphericalangle\, JAK = HAK$, so geht die Verlängerung von AK durch die Mitte O des Pentagons ABG. Die Länge von AK ist leicht zu bestimmen. Da nämlich $\sphericalangle\, DAH = \frac{4}{5} R$, so ist $\sphericalangle\, ADH = \frac{1}{5} R$. Hieraus folgt aber, daß wenn P den Punkt bezeichnet, in welchem DH den Umfang des dem Fünfeck ABG umgeschriebenen Kreises trifft, die Sehnen DP und PA Seiten eines demselben Kreise eingeschriebenen regulären Zehneckes sind; es folgt ferner, daß $\sphericalangle\, PAH = HAK = \frac{2}{5} R$, mithin $\triangle\, PAH \cong KAH$, $AK = AP$, d. h. die Projection AK der Kante AC ist der Seite AP des dem Pentagon ABG umgeschriebenen regulären Zehneckes gleich. Aus dieser Bestimmung von AK ergibt sich weiter die der Höhe CK. Da nämlich $CA^2 = AK^2 + CK^2$, nach Plan. VII., 105 auch $AB^2 = AP^2 + OA^2$ und $CA = AB$, $AK = AP$, so ist auch $CK = OA$, die Höhe von C also dem Radius des dem Pentagon umgeschriebenen Kreises gleich.

Um die Projection von E zu erhalten, seien GD und AB bis zu

ihrem Durchschnittspunkte L verlängert und L sei mit K verbunden, ferner aus dem Centrum O des Pentagons ABG auf AB die Senkrechte OM gefällt; dann wird der Punkt R, in welchem OM und LK verlängert sich schneiden, die Projection von E sein. Denn, da EC verlängert auch durch L gehen muß, so ist ERL ein Dreieck, dessen Ebene CK enthält und das also auf der Ebene ABG senkrecht steht; auf derselben Ebene ABG steht aber auch die Ebene EMG oder EMR senkrecht; mithin ist auch der Durchschnitt beider ER auf ABG senkrecht oder R ist die Projection von E, MR die von ME. — Um die Länge der MR oder die von OR zu bestimmen, bezeichne Q den Punkt, worin OR den Umfang des Kreises ABG trifft; QA ist Seite eines diesem Kreise eingeschriebenen Zehneckes, $\sphericalangle\ OAQ = \frac{1}{5}\ R$; es ist aber auch $\sphericalangle\ ORK = \frac{4}{5}\ R$, denn da $PH = HK$, so ist auch $OM = MR$, $\triangle\ LOM \cong LRM$, $\sphericalangle\ ORK = ROL = \frac{4}{5}\ R$; daraus folgt, daß $QA \parallel RK$, folglich $OR = OK$. Die Projectionen von C und E haben also gleichen Abstand vom Centrum O. — Die Höhe ER anlangend, so ist $ER : CK = RL : KL = OR : PK$, aber PK ist $= OP$, indem $\sphericalangle\ POK = PKO = \frac{2}{5}\ R$, und $OP = CK$, daher ist $ER = OR$, d. h. die Höhe des Punktes E ist dem Abstande der Projectionen R und K von O gleich.

Fig. 161.



Da K die Projection von C, R die von E ist, so ist das Viereck $AKRM$ die Projection des halben Pentagons $ACEM$.

Auf diese Vorherbestimmungen gründet sich nun die in nebenstehender Figur 161 vollständig ausgeführte Construction sowohl der verticalen als horizontalen Entwerfung des regulären Dodekaeders, zu deren Erklärung Folgendes genügen wird:

In ihr ist $ABCDE$ die Horizontalprojection der untern, $RSTUV$ die

der obern Grenz- (nunmehr Grund-) Fläche des Körpers; beide sind reguläre Pentagone, deren Seiten die gegebene Kantenlänge des Dodekaeders haben. An $ABCDE$ schließen sich die Projectionen $ABHGF$, $BCKJH$ &c. der an die untere Grundfläche stoßenden Seitenflächen; an $RSTUV$ die Projectionen $RSGFQ$, $STJHG$ &c., der an diese und die obere Grundfläche stoßenden Seitenflächen. Die Linien FG, GH, HJ &c. bilden ein reguläres Zehneck und die Radien OF, OG, ... desselben (O ist das gemeinschaftliche Centrum der Fünfecke $ABCDE$ und $RSTUV$) werden durch RS, AB, ... halbirt. AF, SG, BH, ... sind den Seiten des regulären Zehneckes $ASBT \ldots R$ gleich, welches entsteht, wenn man die Punkte A, S, B, T, ... nach ihrer Aufeinanderfolge verbindet. In der Verticalprojection, deren Correspondenz mit der Horizontalprojection sogleich aus der Bezeichnungsweise der in beiden enthaltenen Projectionspunkte und den punktirten Linien hervorgeht, sind a, b, c, d, e die Verticalprojectionen der 5 Ecken der unteren Grundfläche; die Höhe der Punkte f, h, k, m und p über der Geraden abc ist $= OA$, die Höhe der Punkte g, i, l, n und q über derselben ab ist $= OF$, also der Unterschied beider Höhen $= AF =$ der Seite des Zehneckes $ASB \ldots R$; die Höhe der Punkte r, s, t, u, v über abc, also die Verticalhöhe des ganzen Körpers (Abstand je zweier parallelen Grenzflächen) ist $= OA + OF = UF$ oder AL.

Noch bleibt der Neigungswinkel bei dem in Rede stehenden Körper zu bestimmen. Derselbe ergibt sich sofort aus dem, was an Fig. 160 bewiesen worden ist. Dort ist $\measuredangle\, EMR$ oder CHk das Supplement des Neigungswinkels zweier der drei zu einer Körperecke $ABCD$ vereinigten regulären Pentagone. Da $CK = OP = PK = 2KH$, so gehört das Supplement des Neigungswinkels beim Dodekaeder einem rechtwinkeligen Dreiecke an, dessen dem Supplemente gegenüberliegende Kathete doppelt so groß wie die anliegende ist. Den trigonometrischen Tafeln zufolge ist ein solcher Winkel $= 63^{\circ}\ 26'\ 5'', 8$; der Neigungswinkel demnach $= 116^{\circ}\ 33'\ 54'', 2$.

II. Wenn zwei Paare gegenüber liegender Kanten einer der beiden Projectionsebenen, etwa der horizontalen, parallel sind:

In diesem Falle bildet, wie Fig. 162 zeigt, die Horizontalprojection des Körpers ein aus vier Fünfecken $ABCDE$, $ABFGH$, $BCLMF$ und $AEKJH$ bestehendes Sechseck $DLMGJK$, welches man sich doppelt, einmal als Projection des oberen, das andere Mal als Projection des unteren Theils der Körper-Oberfläche denken muß. Das Quadrat $ECFH$ in diesem Sechsecke ist die Projection des in V., 25, 4 (Fig. 129) erwähnten Würfels, dessen

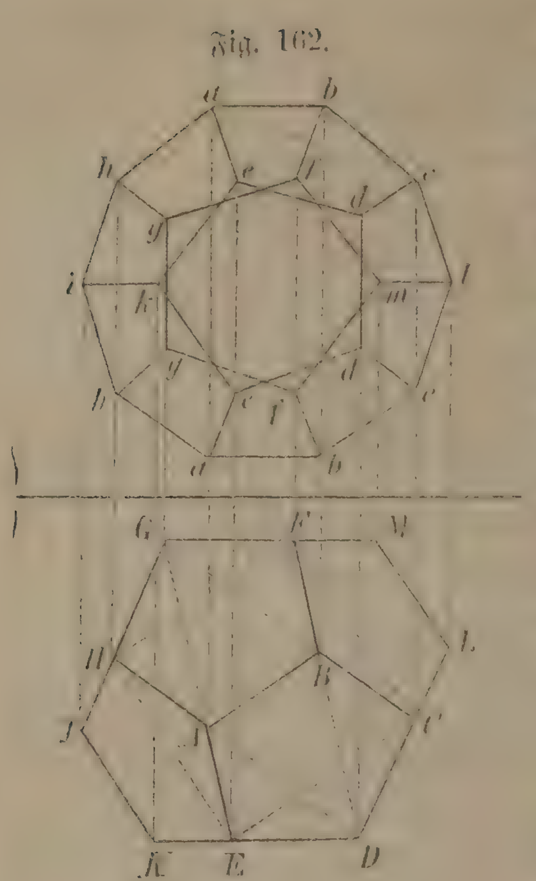


Fig. 162.

Ecken in acht Ecken des Dodekaeders liegen; die vier Seiten KD, DL, MG und GJ sind die Projectionen der vertical stehenden Grenzflächen des Körpers. Bezeichnet a die Kantenlänge des letzteren, d die Diagonale eines regulären Pentagons, dessen Seite $= a$ (a also $=$ dem größern Abschnitte der nach stetiger Proportion getheilten d), so ist in dem genannten Sechsecke $AB = a$, die Seite des Quadrates $ECFH$ $= d$, der Abstand der Parallelen JK, ML sowohl als der Punkte D, G, in welchem HA und FB, AE und CB zusammenlaufen, von den Seiten des Quadrates $= \frac{1}{2} a$.

In der Verticalprojection ist (wenn h die Höhe der Mitte o des Körpers über der Horizontalebene bezeichnet) die Höhe der Punkte a und $b = h \pm \frac{1}{2} (a + d)$; die der Punkte h, e, f und $c = h \pm \frac{1}{2} d$; die Höhe der Punkte g und $d = h \pm \frac{1}{2} a$; i, k, m und l liegen in gleicher Höhe mit o.

Die Gründe der hier angegebenen Projection liegen theils in dem V., 25, 4 vom regulären Dodekaeder Bewiesenen und werden im Uebrigen leicht vom Leser selbst gefunden werden. Die Construction beider Projectionen findet im Obigen hinreichende Andeutung. Der Winkel EDC in ihr ist, wie sofort erhellt, der Neigungswinkel der Grenzflächen des Körpers, für den sich auch aus dieser Construction beweisen läßt, daß er als Außenwinkel einem rechtwinkeligen Dreiecke angehört, dessen Katheten sich wie 2 : 1 verhalten. Wir überlassen auch diesen Beweis dem Leser.

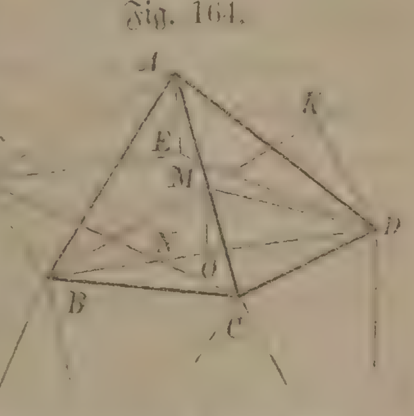
5. Projection des Ikosaeders. Jeder Ecke eines regulären Ikosaeders liegt eine andere Ecke diametral gegenüber. Die sie verbindende Gerade geht durch den Mittelpunkt des Körpers und gelte als dessen Achse. Nach dem, was in III., 45 und V., 25, 5 gezeigt worden, sind die Endpunkte einer solchen Achse die Scheitel zweier fünfseitigen Pyramiden, deren Grundflächen parallel sind und reguläre Pentagone bilden. Diese Grundflächen

theilen die Achse in drei Theile, deren mittlerer dem Radius des einem solchen Pentagone umgeschriebenen Kreises gleich ist; die beiden anderen sind der Seite eines demselben Kreise eingeschriebenen regulären Zehneckes gleich. Auf diese Bestimmungen gründet sich die in nebenstehender Fig. 163 ausgeführte leicht faßliche Projection des in Rede stehenden Körpers. Die Horizontalprojection besteht aus einem regulären Zehnecke und zweien regulären Fünfecken; die Ecken der letzteren liegen in den Ecken des ersteren. In der Verticalprojection ist ax die Projection der vertical stehenden Achse, $am = nx = BG$ (Kante des Körpers), $mn = OB$.

Fig. 163.

Um den Neigungswinkel zweier aneinander stoßenden Grenzflächen des Ikosaeders, wie der Flächen ABC und ADC (Fig. 164) zu construiren, halbire man AC in M und verbinde M mit B und D; BMD ist dann der in Rede stehende Neigungswinkel. Um ihn näher zu bestimmen, ziehe man BD und fälle $MO \perp BD$; BD werde von der Diagonale CJ des regulären Pentagons $BCDEJ$ in N geschnitten. Nach Plan. VI., 15, d ist $BD : DN = DN : BN$, mithin $BD \cdot BN = DN^2$, dabei $DN = DC$. Da ferner $DN = BD - BN$, so ist $DN^2 = BD^2 + BN^2 - 2BD \cdot BN = BD^2 + BN^2 - 2DN^2$; folglich $3DN^2 = BD^2 + BN^2$. Es ist aber, da ADC ein gleichseitiges Dreieck und DM dessen Höhe ist, $3DC^2$ oder $3DN^2 = 4DM^2$, und da $BO = OD$, $BD^2 = 4DO^2$, daher $4DM^2 = 4DO^2 + BN^2$. Hierauf folgt $4(DM^2 - DO^2)$ d. i. $4MO^2 = BN^2$; $2MO = BN$. Aus D fälle man DK senkrecht auf die Verlängerung von BM; es ist dann der doppelte Inhalt des Dreieckes $BMD = BM \cdot DK = MO \cdot BD = \frac{1}{2} BN \cdot BD = \frac{1}{2} DN^2 = \frac{2}{3} DM^2$, folglich da $BM = DM$, $DK = \frac{2}{3} DM$. Das

Fig. 164.



Supplement des Neigungswinkels gehört also einem rechtwinkeligen Dreiecke an, dessen diesem Supplemente gegenüber liegende Kathete $\frac{2}{3}$ der Hypotenuse ist. Der Neigungswinkel beträgt somit 138° 11′ 22″,9.

Anhang II.

Allgemeine Sätze über Polyeder, als Fortsetzung zum ersten Abschnitte des III. Capitels. Die vier sternförmigen regulären Polyeder.

Der im III. Cap. (7) angegebene wichtige Euler'sche Lehrsatz ist die Grundlage aller die Anzahl der Grenzflächen, Ecken und Kanten eines Polyeders betreffenden Untersuchungen. Da diese zu manchen interessanten Sätzen und Folgerungen führen, so haben wir einige derselben in diesem Anhange zusammengestellt. Wir reihen daran ein paar Sätze über die Anzahl der Diagonalen in jedem Polyeder, über die Summe seiner Körperwinkel und eine Erweiterung des Euler'schen Satzes selbst. Der Kürze wegen bezeichnen wir dabei durchweg: die Anzahl der Grenzflächen des Polyeders mit F, die der Ecken desselben mit E und die der Kanten mit K. Nach dem Euler'schen Satze (III., 7) ist $E + F = K + 2$.

1. **Satz. Die Grenzflächen eines Polyeders können nicht alle mehr als fünf Seiten haben; eben so wenig die Ecken alle mehr als fünf Kanten.**

Beweis 1. Hätten die Grenzflächen alle mehr als fünf, also entweder sechs oder noch mehr als 6 Seiten, so wäre die Zahl dieser Seiten oder da je zwei derselben eine Körperkante bilden — es wäre die doppelte Zahl der Kanten, d. i. $2K$ entweder $= 6F$ oder $> 6F$, mithin $K \geqq 3F$. Andererseits hat jede Ecke wenigstens drei Kanten; da jede derselben zweien Ecken gemeinschaftlich ist, so ist jedenfalls $2K \geqq 3E$. Hieraus folgt aber in Verbindung mit dem Vorhergehenden, daß bei der gemachten Voraussetzung $3K \geqq 3E + 3F$, also $K \geqq E + F$ sein müßte. Nach dem Euler'schen Satze ist aber $E + F = K + 2$, also $K < E + F$, was sich widerspricht.

II. Hätten die Ecken eines Polyeders alle mehr als fünf, also entweder sechs oder noch mehr als sechs, Kanten, so wäre, da jede derselben zweien Ecken gemeinsam ist, $2K$ entweder $= 6E$ oder $> 6E$, mithin $K \geqq 3E$. Da aber jede Grenzfläche wenigstens drei Seiten hat und je zwei dieser Seiten eine Kante bilden, so ist jedenfalls $2K \geqq 3F$. Hieraus würde sich derselbe Widerspruch mit dem Euler'schen Satze ergeben, wie vorher. Es können daher nicht alle Ecken mehr als 5 Kanten, und eben so wenig alle Grenzflächen mehr als fünf Seiten haben.

Zusatz. Jedes Polyeder besitzt also drei-, oder vier-, oder fünfseitige Grenzflächen; desgleichen besitzt jedes Polveder drei-, vier- oder fünfkantige Ecken.

2. Satz. Haben alle Grenzflächen eines Polyeders m (also gleich viele) Seiten (m kann dem vorhergehenden Satze nach nur 3, 4 oder 5 sein), so ist:

$$2K = mF, \quad (m-2)\,F = 2\,(E-2), \quad (m-2)\,K = m\,(E-2);$$

haben aber die Grenzflächen alle oder auch nur zum Theile mehr als m Seiten, keine weniger, so ist:

$$2K > mF, \quad (m-2)\,F < 2\,(E-2), \quad (m-2)\,K < m\,(E-2).$$

Beweis. Haben alle Grenzflächen m Seiten, so ist die Zahl dieser Seiten auf allen Grenzflächen gerade $= mF$; kommen unter den Grenzflächen solche vor, die mehr als m Seiten haben, keine dagegen, die deren weniger hat, so ist die Anzahl aller Seiten der Grenzflächen offenbar $> mF$. Nun bilden aber je zwei Seiten der Grenzflächen eine Kante des Körpers; also ist im ersten Falle $2K = mF$, im zweiten $2K > mF$.

Aus der Verbindung von $2K \geqq mF$ mit der Relation $E + F = K + 2$ folgt durch Elimination von K, daß $(m-2)\,F \leqq 2\,(E-2$, und durch Elimination von F, daß $(m-2)\;K \leqq m\,(E-2)$, je nachdem der erste oder der zweite Fall des Satzes vorhanden ist.

Zusatz. Für $m = 3$ erhält man im ersten Falle: $2K = 3F$, $F = 2\,(E-2)$, $K = 3\,(E-2)$; im zweiten: $2K > 3F$, $F < 2\,(E-2)$, $K < 3\,(E-2)$.

Für $m = 4$ ist im ersten Falle des Satzes: $K = 2F$, $F = E - 2$, $K = 2\,(E-2)$; im zweiten: $K > 2F$, $F < E - 2$, $K < 2\,(E-2)$. Für $m = 5$ erhält man im ersten Falle: $2K = 5F$, $3F = 2\,(E-2)$, $3K = 5\,(E-2)$; im zweiten Falle: $2K > 5F$, $3F < 2\,(E-2)$, $3K < 5\,(E-2)$.

3. **Satz. Haben alle Ecken eines Polyeders gleichviele, nämlich n Kanten oder Seitenflächen** (n kann dem vorigen Satze gemäß nur 3, 4 oder 5 sein), **so ist:**

$$2K = nE,\ (n-2)E = 2(F-2),\ (n-2)K = n(F-2);$$

haben aber die Ecken alle oder zum Theile mehr als n Kanten, keine weniger, so ist:

$$2K > nE,\ (n-2)E < 2(F-2),\ (n-2)K < n(F-2).$$

Beweis. Haben alle Ecken n Kanten, so ist die Zahl dieser Eckkanten im Ganzen $= nE$; sind unter den Ecken solche, die mehr als n Kanten haben, keine die weniger, so ist die Zahl der Eckkanten offenbar $> nE$. Nun ist aber jede solche Kante zweien Ecken des Körpers als Körperkante gemein, also ist im ersten Falle $2K = nE$, im anderen $2K > nE$.

Aus der Verbindung dieser Relation zwischen K und E mit der Euler'schen $E + F = K + 2$ folgen wieder durch Elimination von K und von E die beiden übrigen.

Zusatz. Für $n = 3$ ergibt sich im ersten Falle des Satzes $2K = 3E$, $E = 2\ (F-2)$, $K = 3\ (F-2)$; im zweiten: $2K > 3E$, $E < 2\ (F-2)$, $K < 3\ (F-2)$.

Für $n = 4$ im ersten Falle: $K = 2E$, $E = F-2$, $K = 2\ (F-2)$; im zweiten: $K > 2E$, $E < F-2$, $K < 2\ (F-2)$.

Für $n = 5$ endlich ergibt sich im ersten Falle: $2K = 5E$, $3E = 2\ (F-2)$, $3K = 5\ (F-2)$; im zweiten: $2K > 5E$, $3E < 2\ (F-2)$, $3K < 5\ (F-2)$.

4. Aus der Verbindung der vorstehend angegebenen Relationen ergibt sich leicht der größte und kleinste Werth, den jede der drei Größen E, F und K in einem Polyeder haben kann, wenn eine der beiden anderen gegeben ist. Ist nämlich

K gegeben, so beträgt	E, F	mindestens	$\frac{1}{3}K + 2$,	höchstens	$\frac{2}{3}K$,
E " " "	F	"	$\frac{1}{2}E + 2$,	"	$2E - 4$,
	K	"	$\frac{3}{2}E$,	"	$3E - 6$,
F " " "	E	"	$\frac{1}{2}F + 2$,	"	$2F - 4$,
	K	"	$\frac{3}{2}F$,	"	$3F - 6$.

Hieraus ergibt sich:

5. **Satz. Kein Polyeder kann sieben Kanten haben.**

Denn wäre $K = 7$, so könnte E sowohl als F höchstens $4\frac{2}{3}$ und

müßte mindestens $4\frac{1}{2}$ betragen. Zwischen diesen beiden Grenzen liegt aber keine ganze Zahl.

6. Satz. Kein polyedrischer Körper hat weniger, als 4 Grenzflächen, 4 Ecken, 6 Kanten.

Beweis. Da in jedem Polyeder $3\,(E-2) \geqq K$ und $2\,K \geqq 3E$, so ist auch $2\,(E-2) \geqq E$, woraus folgt $E \geqq 4$. Eben so, da $3\,(F-2) \geqq K$ und $2K \geqq 3F$, ist $2\,(F-2) \geqq F$, also $F \geqq 4$.

Aus diesen Bestimmungen folgt weiter, daß $E + F \geqq 8$; aber $E + F = K + 2$, daher auch $K + 2 \geqq 8$, $K \geqq 6$. Der Körper, in welchem diese Minima allein vorkommen, ist das von 4 Dreiecken begrenzte Tetraeder.

7. Satz. In jedem Polyeder beträgt die Anzahl der dreiseitigen Grenzflächen und dreikantigen Ecken zusammengenommen wenigstens 8.

Beweis. Die Zahl der dreiseitigen Grenzflächen eines Polyeders sei $= a$, die der mehrseitigen $= b$; die Zahl der dreikantigen Ecken $= \alpha$, die der mehrkantigen $= \beta$, mithin $a + b = F$, $\alpha + \beta = E$. Nach den in S. 2 und 3 schon gebrauchten Schlüssen ist $3a + 4b \leqq 2K$ und ebenso $3\alpha + 4\beta \leqq 2K$. Hieraus folgt: $a + \alpha + b + \beta = F + E$ und $3\,(a + \alpha) + 4\,(b + \beta) \leqq 4K$; aber $F + E = K + 2$, daher $4(a + \alpha) + 4\,(b + \beta) = 4K + 8 \geqq 3\,(a + \alpha) + 4\,(b + \beta) + 8$, und hieraus $a + \alpha \geqq 8$.

Zusatz. Es gibt also kein Polyeder, in welchem dreiseitige Grenzflächen und dreikantige Ecken zugleich ganz fehlen.

8. Satz. Besteht die Oberfläche eines Polyeders 1) nur aus Dreiecken, oder aus Dreiecken und Sechsecken, oder 2) nur aus Vierecken, oder Vierecken und Sechsecken, oder 3) nur aus Fünfecken, oder Fünfecken und Sechsecken, so ist die Zahl der Dreiecke $\geqq 4$, die der Vierecke $\geqq 6$, die der Fünfecke $\geqq 12$. Dasselbe gilt in analoger Weise von den Ecken. Sind diese alle 3kantig, oder theils 3, theils 6kantig, so ist die Zahl der 3kantigen $\geqq 4$, u. s. w.

Beweis I für die Grenzflächen. Die Anzahl der weniger als 6 (etwa m) Seiten habenden Grenzflächen sei a, die der 6seitigen b (b kann auch $= 0$ sein), dann ist $a + b = F$, $ma + 6b = 2K$, und nach Satz 3 dieses Anhangs $K \leqq 3F - 6$. Setzt man hierin für F und K ihre Werthe,

so ergibt sich $(6 - m)\, a \gtreqless 12$, also $a \gtreqless \frac{12}{6 - m}$. Für $m = 3$ ist also $a \gtreqless 4$; für $m = 4$ ist $a \gtreqless 6$; für $m = 5$ endlich $a \gtreqless 12$, wie der Satz es ausspricht.

Ganz in gleicher Weise ist der Beweis in Bezug auf die polyedrischen Ecken zu führen.

9. Satz. I. Sind die Grenzflächen eines Polyeders alle dreiseitig, die Ecken entweder 3- und 6kantig, oder 4- und 6kantig, oder 5- und 6kantig, so ist im ersten Falle die Zahl der 3kantigen Ecken gerade $= 4$, im zweiten die Zahl der 4kantigen Ecken $= 6$, im dritten die der 5kantigen Ecken $= 12$. II. Sind die Grenzflächen alle 4seitig, die Ecken theils 3-, theils 4kantig, so ist die Anzahl der 3kantigen gerade 8. III. Dasselbe gilt, wenn man im Ausdrucke des Satzes durchweg „Grenzflächen" mit „Ecken", „kantig" mit „seitig" u. s. w. vertauscht.

Beweis I. Die Anzahl der 6kantigen Ecken sei $= \beta$, die der weniger als 6 (etwa m) Kanten zählenden Ecken sei $= \alpha$, dann ist $\alpha + \beta = E$, $m\alpha + 6\beta = 2K$, und, da die Oberfläche nur aus Dreiecken bestehen soll, nach S. 2 dieses Anhangs $K = 3\,(E - 2)$. Substituirt man in dieser letzten Gleichung die Werthe von K und E aus der ersten, so ergibt sich $\alpha = \frac{12}{6 - m}$. Je nachdem nun $m = 3, 4$ oder 5, ist $\alpha = 4$, 6 oder 12.

Beweis II. Sind die Grenzflächen alle 4seitig, so ist nach S. 2, $K = 2\,(E - 2)$. Bezeichnet nun α die Anzahl der 3kantigen Ecken, β die der 4kantigen, so ist $\alpha + \beta = E$, $3\alpha + 4\beta = 2K$. Aus der Combination dieser drei Gleichungen folgt $\alpha = 8$.

Beweis III. Eben so wird der Beweis geführt, wenn im Ausdrucke des Satzes durchgehends „Ecken" und „Grenzflächen" mit einander vertauscht werden.

Die in den voranstehenden Sätzen herrschende Dualität in Bezug auf die Grenzflächen und Ecken, vermöge welcher diese mit jenen und jene mit diesen überall vertauscht werden können, hat ihren Grund in dem nachfolgenden Satze.

10. Satz. Jedem Polyeder von E Ecken und F Grenzflächen entspricht ein anderes von F Ecken und E Grenzflächen, und hat das erste a dreiseitige, b vierseitige, c fünfseitige u. s. w. Grenzflächen, α dreikantige, β vierkantige 2c. Ecken, so hat das zweite a dreikantige, b vierkantige 2c.

Ecken, α dreiseitige, β vierseitige ꝛc. Grenzflächen. Solche Polyeder können **zugeordnete** genannt werden.

Von der Richtigkeit dieses Satzes wird man sich leicht überzeugen, wenn man sich irgend ein Polyeder vorstellt und hierauf ein zweites, dessen Ecken in den Grenzflächen des ersten liegen, so zwar, daß in jeder dieser Grenzflächen nur eine Ecke liegt. Um dieses zweite Polyeder zu construiren, braucht man nur in jeder Grenzfläche des ersten einen Punkt anzunehmen (so jedoch, daß diejenigen dieser Punkte, welche in den eine Ecke des Körpers bildenden Grenzflächen genommen sind, unter sich in einer Ebene liegen), hierauf jene Punkte je zwei und zwei in derselben Ordnung zu verbinden, in welcher die Grenzflächen, wozu sie gehören, an einander stoßen. Die Verbindungslinien bilden das Kantennetz des zweiten Polyeders. So entspricht dem von 6 Vierecken begrenzten Hexaeder das von 8 Dreiecken begrenzte Octaeder, dem von 20 Dreiecken begrenzten Ikosaeder das von 12 Fünfecken begrenzte Dodekaeder, der n-seitigen Doppelpyramide der n-seitige Obelisk ꝛc. — Jede Relation, die in einem Polyeder zwischen E und F und den im Satze genannten Zahlen $a, b, c \ldots \alpha, \beta, \gamma \ldots$ gilt, muß deshalb gültig bleiben, wenn E und F, a und α, b und β, ... mit einander vertauscht werden.

11. Anzahl der Diagonalen eines Polyeders.

Die Zahl sämmtlicher in einem Polyeder möglichen Diagonalen hängt von der Anzahl der Grenzflächen jeder Art ab, welche die Oberfläche des Polyeders bilden. Diese bestehe aus f_3 Dreiecken, f_4 Vierecken, f_5 Fünfecken u. s. w., zuletzt aus f_n n-Ecken, alsdann ist:

$$f_3 + f_4 + f_5 + \cdots + f_n = F, \text{ Gesammtzahl der Grenzflächen,}$$
$$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \cdots + nf_n = 2K, \text{ doppelte Kantenzahl.}$$

Aus F und K ergibt sich E. Denkt man sich nun aus jeder Ecke gerade Linien nach allen übrigen Ecken gezogen, so ist die Zahl solcher Linien $= \frac{1}{2}E\,(E - 1)$. Diese Linien sind aber von dreierlei Art: theils sind es Diagonalen des Körpers, ihre Anzahl sei x; theils Kanten desselben, ihre Anzahl ist K, dessen Werth oben angegeben; theils sind es die Diagonalen der Grenzflächen. Die Anzahl der letztern beträgt bekanntlich in jedem Vierecke 2, in jedem Fünfecke 5, ... im n-Ecke $\frac{1}{2}\,n\,(n - 3)$, daher die Gesammtzahl dieser Diagonalen auf der Oberfläche $= 2f_4 + 5f_5 + 9f_6 + \cdots\cdots + \frac{1}{2}n\,(n - 3)\,f_n$. Zieht man nun diese, so wie die Zahl der Kanten, von der angegebenen Zahl der Verbindungslinien jeder Ecke mit jeder anderen ab, so bleibt für die Zahl der Diagonalen des Körpers:

$x = \frac{1}{2}E\,(E - 1) - K - 2f_4 - 5f_5 - 9f_6 - \cdots - \frac{1}{2}n\,(n-3)\,f_n$,

oder, setzt man für K seinen Werth und multiplicirt mit 2:

$$2x = E\,(E-1) - 3f_3 - 8f_4 - 15f_5 - \cdots - n\,(n-2)\,f_n.$$

Beispiel 1. In der n-seitigen Pyramide ist $E = n + 1$, $f_3 = n$, $f_4 = f_5 \cdots = o$, $f_n = 1$, daher $2x = n\,(n+1) - 3n - n\,(n-2)$, $x = o$.

2. In der n-seitigen Doppelpyramide ist $E = n + 2$, $f_3 = 2n$, $f_4 = o, \ldots f_n = o$, daher $2x = (n+2)\,(n+1) - 6n$, $x = \frac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)$.

3. Im n-seitigen Prisma oder Obelisk ist $E = 2n$, $f_3 = o$, $f_4 = n$, $f_5 = o$, $f_n = 2$, daher

$$2x = 2n\,(2n-1) - 8n - 2n\,(n-2),\quad x = n\,(n-3).$$

4. In dem von 12 Fünfecken eingeschlossenen Dodekaeder ist $E = 20$, $f_3 = f_4 = o$, $f_5 = 12$, daher $2x = 20 \cdot 19 - 15 \cdot 12 = 200$, $x = 100$. In dem von 20 Dreiecken begrenzten Ikosaeder ist $E = 12$, $f_3 = 20$, f_4 und folgende $= 0$, daher $2x = 12 \cdot 11 - 3 \cdot 20$, $x = 36$.

12. Der Körperwinkel des Polyeders.

Dem körperlichen Winkel kann man, wie jedem andern Winkel, eine Größe beilegen, die aus der Vergleichung desselben mit anderen seiner Art entspringt. Offenbar ist diese Größe dem Inhalte desjenigen sphärischen Drei- oder Vieleckes proportional, welches aus dem Durchschnitte der körperlichen Ecke mit einer um ihren Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kugel entsteht und den Raum der Ecke schließt, so daß zwei Körperwinkel sich wie die ihnen entsprechenden sphärischen Drei- oder Vielecke verhalten, vorausgesetzt, daß der Kugelradius derselbe ist. — Nimmt man nun, um die Größe aller Körperwinkel auszudrücken, einen derselben, nämlich den von drei auf einander senkrechten Ebenen gebildeten (dreifach rechten) als Einheit an, so folgt leicht aus II., 54, daß jeder Körperwinkel gleich ist dem Ueberschusse der Summe seiner Flächenwinkel über zweimal so viel rechte Winkel, als die um 2 verminderte Zahl der Kanten oder Seitenflächen beträgt. Dieses vorausgesetzt, läßt sich der nachfolgende Satz aufstellen.

13. Satz. **In jedem Polyeder ist die Summe der Körperwinkel doppelt so groß, als der Ueberschuß der Summe seiner sämmtlichen Flächenwinkel (Neigungswinkel) über zweimal so viel rechte Winkel, als die um 2 verminderte Zahl der Grenzflächen beträgt.**

Beweis. Bezeichnet man die Körperwinkel des Polyeders mit A, B, C, ..., die Summe der Flächen- oder Neigungswinkel an den Kanten

eines jeden der Ordnung nach mit α, β, γ, ..., die Anzahl der Kanten bei jedem ebenfalls der Ordnung nach mit m, n, p, ..., so hat man nach dem oben über die Größe eines Körperwinkels Gesagten folgende Reihe von Gleichungen:

$$A = \alpha - 2\,(m - 2)$$
$$B = \beta - 2\,(n - 2)$$
$$C = \gamma - 2\,(p - 2) \quad \text{u. s. w.}$$

Addirt man dieselben und beachtet, daß jeder Flächenwinkel, so wie jede Kante zweien polyedrischen Ecken angehört, so erhält man (unter Bezeichnung der Summe aller Neigungswinkel, welche die Grenzflächen des Körpers an den Kanten desselben bilden, mit Σ):

$$A + B + C + \cdots = 2\Sigma - 2\,(2K - 2E),$$

wo K die Anzahl aller Kanten, E die aller Ecken des Körpers bezeichnet. Nach dem Euler'schen Satze ist $K - E = F - 2$, unter F die Zahl der Grenzflächen verstanden; daher ist

$$A + B + C \cdots = 2\,[\Sigma - 2\,(F - 2)],$$

was dem Ausdrucke des Satzes entspricht.

14. **Erweiterung des Euler'schen Satzes.** Theilt man die Oberfläche eines Polyeders in T Theile durch K Kanten, welche n von einander abgesonderte Netze bilden, und bezeichnet E die Anzahl der Ecken, welche auf diesen Kanten liegen, so ist:

$$T + E = K + n + 1.$$

Beweis. Bezeichnet man die Anzahl der Theile, welche innerhalb jedes einzelnen für sich betrachteten Netzes liegen, durch t_1, t_2, t_3, ... t_n die Anzahl der das Netz bildenden Kanten durch K_1, K_2, K_3, ... K_n, die Zahl der Ecken auf diesen Kanten durch e_1, e_2, e_3, ... e_n, so erhellt augenblicklich aus den im Beweise des Euler'schen Satzes III., 7 gemachten Schlüssen die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$t_1 + e_1 = K_1 + 1$$
$$t_2 + e_2 = K_2 + 1$$
$$\cdots\cdots$$
$$t_n + e_n = K_n + 1$$

deren Zahl $= n$ ist. Addirt man sie und beachtet, daß der zwischen den Netzen liegende Theil der Oberfläche mit der Summe $t_1 + t_2 + \cdots t_n$ die Gesammtzahl T der Theile ausmacht, die Summe folglich $= T - 1$, übrigens $e_1 + e_2 + \cdots e_n = E$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = K$ ist, so erhält man $T - 1 + E = K + n$; also ist $T + E = K + n + 1$, w. z. b. w.

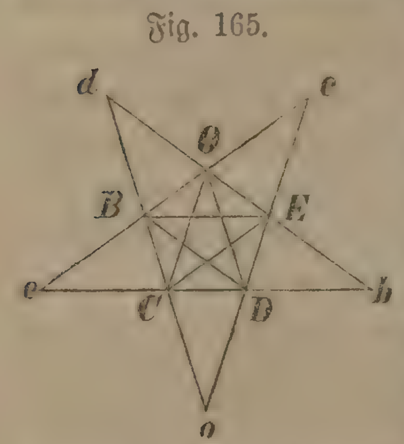
Zusatz. Bilden alle Kanten nur ein zusammenhängendes Netz, so ist T der Anzahl F der Grenzflächen gleich, $n = 1$, und obige Gleichung gibt als speciellen Fall die Euler'sche Relation $F + E = K + 2$.

Die vier sternförmigen regulären Körper.

15. Außer den von Euklid im 13. Buch seiner Elemente betrachteten fünf regulären Körpern gibt es noch vier andere von Poinsot im Jahre 1809 entdeckte Körper*), deren Seitenflächen, wie bei jenen, sämmtlich reguläre Polygone einerlei Art sind und dabei in gleicher Anzahl an jeder Ecke unter gleichen Neigungswinkeln an einander stoßen. Sie unterscheiden sich jedoch von jenen fünf regulären Körpern gewöhnlicher Art dadurch, daß bei zweien derselben die Grenzflächen, bei zweien anderen die Körperwinkel an den Ecken sternförmig sind; sie bilden also eine höhere Art von regulären Polyedern und stehen den regulären Polyedern gewöhnlicher Art eben so gegenüber, wie die sternförmigen regulären Polygone den Polygonen gewöhnlicher Art.

Die Ableitung eines regulären sternförmigen Polygones aus dem regulären Polygone gewöhnlicher Art von derselben Seitenzahl, z. B. eines regulären Sternfünfeckes, Pentagramms (s. Plan. VII., 2, 112 und 113), aus dem regulären Fünfecke $BCDEO$ kann auf zweifache Weise geschehen, entweder indem man je zwei Seiten, welche durch eine gleiche Zahl unter den übrigen getrennt sind, bis zu ihrem Durchschnitte verlängert, oder indem man je zwei Ecken, zwischen welchen eine gleiche Anzahl unter den übrigen liegt, durch Diagonalen verbindet.

Fig. 165.



Aus dem gewöhnlichen regulären Fünfecke $BCDEO$ (Fig. 165) erhält man auf die erste Weise das Sternfünfeck $ocebdo$, auf die zweite das Sternfünfeck $OCEBDO$. Als eine besondere Eigenschaft der Seiten des regulären Sternfünfeckes $ocebdo$ möge hervorgehoben werden, daß jede Seite desselben z. B. co durch einen in ihr gelegenen Eckpunkt E

*) S. Journal de l'école polytechnique, 10. Cah. p. 16 und die Schrift: Ueber Vielecke und Vielflache, von Dr. Christian Wiener. — Leipzig 1864.

oder D des Fünfeckes $OEDCB$ stetig getheilt wird, daß also $oc : oE = oE : cE$ oder $oc : cD = cD : Do$. Warum?

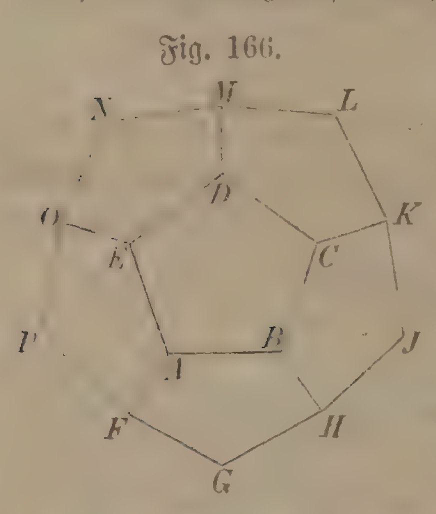
Beschreibt man um $OBCDEO$ einen Kreis, so beträgt bei dem gewöhnlichen regulären Fünfecke die Summe der zu den Seiten OB, BC, CD, DE und EO gehörigen Mittelpunktswinkel $4R$, dagegen bei dem sternförmigen regulären Fünfecke $OCEBDO$ die Summe der zu den Seiten OC, CE, EB, BD und DO gehörigen Mittelpunktswinkel $2 \cdot 4R = 8R$. Aus dem regulären Siebenecke lassen sich zwei Arten von sternförmigen Siebenecken (Heptagrammen) bilden, bei der einen betragen die zu den Seiten gehörigen Mittelpunktswinkel zusammen $2 \cdot 4R = 8R$, bei den anderen $3 \cdot 4R = 12R$. Aus dem regulären Eilfecke erhält man vier verschiedene reguläre Stern-Eilfecke, bei welchen die Summe der zu den Seiten gehörigen Mittelpunktswinkel $2 \cdot 4$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 4$ und $5 \cdot 4R$ beträgt u. s. w.

Den sternförmigen Vielecken entsprechen zunächst die sternförmigen körperlichen Ecken, die Sternecken. Denkt man sich auf einem sternförmigen Polygone, etwa dem Pentagramme $ocebdo$ (Fig. 165) als Basis eine Pyramide errichtet, deren Spitze s sei, so entsteht an dieser Spitze eine eigene körperliche Ecke, welche den Namen sternförmige körperliche Ecke oder Sternecke führt, und zwar reguläre, wenn die Pyramide eine reguläre ist. So wie bei einem Sternpolygone $ocebd$ nur die Punkte o, c, e, b und d als Eckpunkte des Polygones, nicht aber die Durchschnittspunkte O, B, C, D und E als solche gelten, so sind auch als Kanten der entsprechenden Sternecke $socebd$ nur die äußeren, nach den Eckpunkten des Sternpolygones gehenden Geraden so, sc, se ... zu betrachten; die einspringenden Kanten sO, sB, sC ..., welche als Durchschnitte nicht auf einander folgender Seitenflächen der körperlichen Ecke sich darstellen, mögen „secundäre" Kanten heißen.

Der zweifachen Ableitung der regulären Sternvielecke aus den regulären Vielecken gewöhnlicher Art entspricht eine zweifache Ableitung der sternförmigen regulären Polyeder aus den regulären Polyedern gewöhnlicher Art. Diese geschieht nämlich 1) dadurch, daß man aus je einem regulären Polygone, welches entweder selbst Seitenfläche des Polyeders ist, oder durch irgend eine Zahl an einander stoßender Kanten des letzteren gebildet wird, ein Sternpolygon construirt und die sämmtlichen Kanten dieses Sternpolygones als Kanten des Sternpolyeders betrachtet; 2) dadurch, daß man Diagonalebenen durch jede Gruppe solcher Ecken eines regulären Polyeders legt, welche die Ecken congruenter regulärer Polygone entweder wirklich bilden oder doch bilden können.

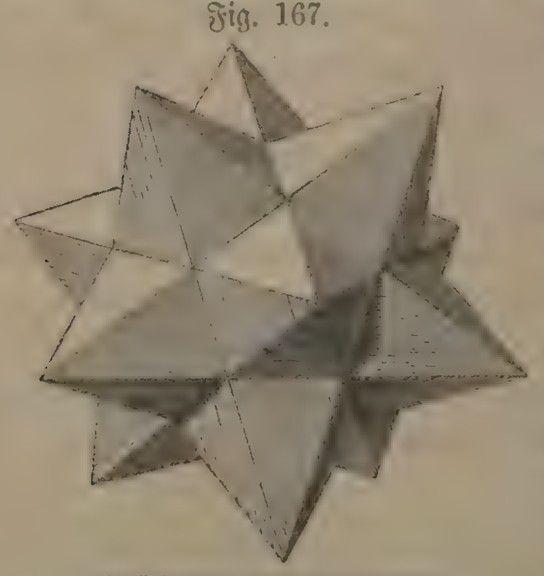
Zur Ableitung der sternförmigen Polyeder aus den ältern regulären Körpern eignen sich nicht, wie leicht zu erkennen ist, die drei ersten Körper dieser Art, nämlich das Tetraeder, der Würfel und das Octaeder, sondern nur das Dodekaeder und das Ikosaeder. Die Zahl der allein möglichen regularen Sternpolyeder ist, wie sich bei näherer genauer Untersuchung ergibt, vier; die Ableitung derselben ist die folgende:

Fig. 166.



1) Bildet man aus jeder der zwölf fünfeckigen Seitenflächen eines Dodekaeders z. B. der Fläche *ABCDE* (Fig. 166) durch Verlängerung der Seiten ein Sternfünfeck, so werden über einer jeden solchen Seitenfläche die Verlängerungen der fünf an sie stoßenden Kanten in einem Punkte zusammentreffen und die Spitzen einer fünfseitigen Pyramide bilden, deren Grundfläche die Seitenfläche des Dodekaeders ist. Die zwölf auf diese Weise den Seitenflächen aufgesetzten Pyramiden bilden mit dem Dodekaeder selbst als Kern einen sternförmigen Körper, dessen Seitenflächen sämmtlich congruente reguläre Sternfünfecke sind und dessen Kantenwinkel, da sie mit denen des Grund-Dodekaeders zusammenfallen, sammtlich unter einander gleich sind. Man kann jede auf eine Seitenfläche z. B. *ABCDE* (Fig. 166) aufgesetzte Pyramide auch dadurch erzeugt denken, daß man die Ebenen der an dieselbe anstoßenden fünf Seitenflächen *ABG*, *BCJ*, *CDL*, *DEN* und *EAP* bis zum gemeinschaftlichen Durchschnitte in einem Punkte erweitert denkt.

Fig. 167.



Zwölfeckiges Sterndodekaeder.

Der auf die eine oder andere Weise entstandene Körper (Fig. 167) hat so viele fünfkantige Ecken, als das Dodekaeder Flächen hat, nämlich 12, außerdem aber noch so viele dem regulären Körper nicht zugehörige, also secundäre, einspringende sechskantige körperliche Ecken, als das Dodekaeder Ecken hat, nämlich 20. Sowohl die Zahl der Flächen als die der Kanten dieses sternförmigen

Polyeders stimmt mit der des gewöhnlichen Dodekaeders überein, beträgt also 12 bei den Flächen, 30 bei den Kanten. Die *äußeren* Seitenflächen des Körpers sind diejenigen Dreiecke, um welche die sternförmigen Fünfecke die gewöhnlichen, aus denen sie entstanden sind, überragen. Die Anzahl sämmtlicher an einander stoßenden gleichschenkeligen Dreiecke ist 60.

Der Name dieses Körpers ist passend: „*Zwölfeckiges Sterndodekaeder*" *) (von Poinsot Sterndodekaeder der 2. Art, von Cayley kleines Sterndodekaeder genannt).

Man kann diesen Körper auch aus dem Ikosaeder (Fig. 168) erzeugt denken, indem man in jedes der 12 regulären Fünfecke *OBCDE*, *ABGHD* u. s. w., welche durch die Kanten des Polyeders gebildet werden, die *inneren* Sternfünfecke construirt, wodurch man die 30 Kanten des sternförmigen Körpers erhält. Die Ecken fallen in die Ecken des Ikosaeders, stimmen also in der Zahl mit der Zahl der Ecken dieses Körpers überein.

Fig. 168.

2) Bildet man aus jedem der 12 regulären Fünfecke, welche die Kanten des Ikosaeders (Fig. 168) bilden, nämlich aus *OBCDE*, *BCHRN*, *DHRKE* u. s. w. durch *Verlängerung* der Seiten ein Sternfünfeck, so treffen über jeder Seitenfläche des Ikosaeders z. B. über *CHD* drei der verlängerten Seiten *BC*, *RH* und *ED* in *einem* Punkte zusammen, und bilden die Seitenkanten einer dreiseitigen Pyramide, welche die Seitenfläche *CHD* zur Grundfläche hat. Jede auf eine Seitenfläche, z. B. *CHD*, aufgesetzte Pyramide kann man sich auch dadurch erzeugt denken, daß man die Ebenen der drei an einander stoßenden Fünfecke *CDEOB*, *DHRKE* und *HCBNR* bis zum gegenseitigen Durchschnitte erweitert.

Der aufgesetzten Pyramiden sind 20, sie bilden mit dem Ikosaeder als Kern einen sternförmigen Körper (Fig. 169), der so viele Kanten hat, als das Ikosaeder, also 30. Die Zahl der Ecken stimmt mit der Zahl der Flächen des Ikosaeders überein, beträgt also 20; der Körper hat außerdem noch so viele dem regulären Körper nicht zugehörige einspringende secundäre Ecken, als das Ikosaeder Ecken hat, nämlich 12. Die *äußeren* Seitenflächen des Körpers sind wie bei dem ersten Körper diejenigen Dreiecke, um welche die

*) Wir sind in der Benennung der vier regulären Körper dem Vorschlage Wiener's (Ueber Vielecke und Vielflache, S. 27) gefolgt.

Sternfünfecke diejenigen Fünfecke, aus denen sie entstanden sind, übertreffen. Die Anzahl der aneinander stoßenden gleichschenkeligen Dreiecke beträgt, wie bei dem ersten Körper, 60.

Fig. 169.



Zwanzigeckiges Sterndodekaeder.

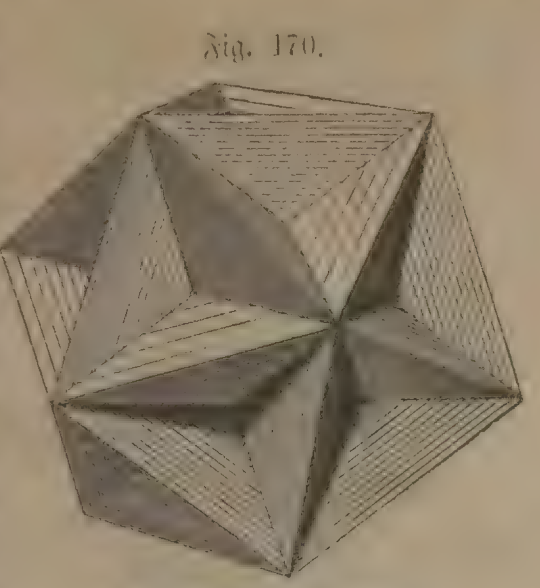
Der von zwölf Sternfünfecken begrenzte sternförmige Körper (Fig. 169) führt den Namen: „Zwanzigeckiges Sterndodekaeder" (Dodekaeder der vierten Art nach Poinsot, großes Sterndodekaeder nach Cayley).

Auch aus dem Dodekaeder läßt der Körper sich darstellen. Man construire (Fig. 166) zu sämmtlichen Fünfecken, welche die einer Seitenfläche des Dodekaeders parallelen Diagonalen der übrigen Seitenflächen bilden, also zu *FHKMO*, *GJLNP* u. s. w. die inneren Sternfünfecke, so erhält man die zwölf sternförmigen Seitenflächen des Polyeders.

3) Legt man durch je fünf Kanten des Ikosaeders (Fig. 168), welche ein reguläres Fünfeck einschließen, z. B. die Kanten *BC*, *CD*, *DE*, *EO* und *OB*, eine Ebene, so umschließen diese sämmtlichen Ebenen der Fünfecke einen sternförmigen Körper, der so viele Grenzflächen hat, als das Ikosaeder Ecken, also 12, und dessen 30 Kanten mit denen des Ikosaeders, jedoch in einer andern Anordnung, zusammenfallen. Die secundären Kanten, welche durch den Durchschnitt je zweier Ebenen entstehen, sind die Seiten der inneren Sternfünfecke, welche aus den 12 Fünfecken gebildet werden, stimmen also mit den Hauptkanten des ersteren Sternpolyeders (Fig. 167) überein, ihre Zahl ist also 30. Die sämmtlichen Ebenen schneiden aus dem Kern-Ikosaeder nach Innen dreiseitige Pyramiden aus, welche zu Grundflächen die Seitenflächen des Ikosaeders haben. Die Anzahl der Hauptecken des Polyeders stimmt mit der des Ikosaeders überein, beträgt also 12; die Zahl der einwärts liegenden, secundären, Ecken stimmt mit der Zahl der Flächen des Ikosaeders überein, beträgt also 20. Die äußeren Grenzflächen des Körpers sind diejenigen Dreiecke, um welche die Fünfecke die eingeschriebenen Sternfünfecke überragen; die Zahl dieser gleichschenkeligen stumpfwinkeligen Dreiecke ist 60.

Da bei der Bildung des Körpers an jeder Ecke des Ikosaeders, z. B. an D (Fig. 168), fünf sich durchschneidende Ebenen $DCBOE$, $DHCBA$, $DJRGC$, $DEKRH$ und $DAOKJ$ zusammentreffen, so wird durch dieselben an jeder der Ecken eine Sternecke gebildet. Aus Rücksicht auf die eigenthümliche Gestalt seiner Ecken führt der besprochene dritte Körper (Fig. 170) den Namen „Sterneckiges Dodekaeder" (bei Poinsot Dodekaeder der dritten Art, bei Cayley großes Dodekaeder).

Fig. 170.



Sterneckiges Dodekaeder.

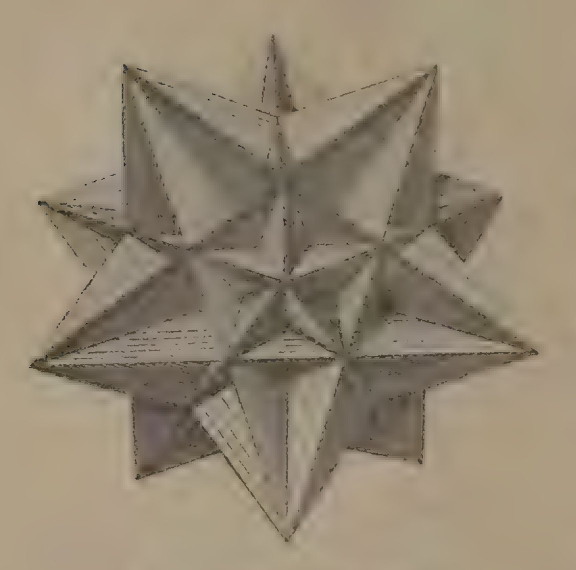
Auch aus dem Dodekaeder kann dieser dritte Körper abgeleitet werden, wenn man nur die Ebene jeder Seitenfläche, z. B. $NOEDM$ (Fig. 166), des gewöhnlichen Dodekaeders bis zur einfachen Begegnung mit den Ebenen der fünf an die gegenüberliegende parallele Grenzfläche stoßenden Grenzflächen $BCKJH$, $ABHGF$ u. s. w. erweitert. Die Durchschnitte dieser letzteren fünf Ebenen mit den ersteren geben zwei reguläre Fünfecke, ein gewöhnliches und ein Sternfünfeck. Diese beiden Fünfecke sind die Seitenflächen regulärer Körper, jenes des hier unter Nr. 3 betrachteten (Fig. 170), dieses des unter Nr. 1 beschriebenen (Fig. 167).

4) Legt man durch je drei entferntere Eckpunkte eines Ikosaeders (Fig. 168), die in der Beziehung stehen, daß sie die Spitzen eines gleichseitigen Dreieckes bilden, z. B. durch die Punkte A, G und J, durch die Punkte A, H und K u. s. w. Ebenen, so erhält man einen Körper eingeschlossen von 20 gleichseitigen Dreiecken AGJ, AHK, AJN u. s. w., der mit dem Ikosaeder gleich viel Ecken hat, also 12 und gleich viele Kanten, also 30.

Auch aus dem Dodekaeder läßt sich jener Körper darstellen. Verlängert man bei dreien in einer Ecke zusammenstoßenden Seitenflächen (z. B. in den bei E (Fig. 166) anstoßenden Seitenflächen $EABCD$, $EDMNO$ und $EOPFA$) die der gemeinschaftlichen Ecke E gegenüberstehenden Seiten BC, MN und PF bis zum gegenseitigen Durchschnitte, so erhält man ein gleichseitiges

Dreieck. Solcher gleichseitigen Dreiecke gibt es im Ganzen 20; ihre Ebenen schließen einen sternförmigen Körper ein.

Fig. 171.



Sterneckiges Ikosaeder.

Die Kanten dieses Körpers (Fig. 171) sind dieselben wie die des ersten Sternpolyeders (Fig. 167) jedoch in der Anordnung, in welcher dieselben gleichseitige Dreiecke bilden. Legt man also durch je drei ein gleichseitiges Dreieck bildende Kanten des zwölfeckigen Sterndodekaeders (Fig. 167) Ebenen, so erhält man das vierte reguläre Sternpolyeder.

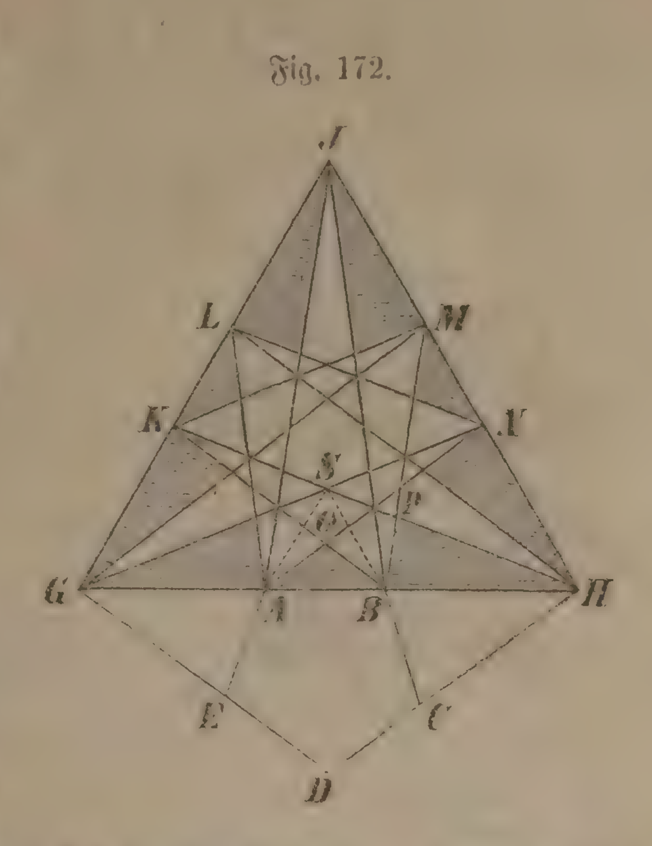
Bei der Darstellung dieses Körpers aus dem Ikosaeder stoßen an jeder Ecke des Polyeders fünf gleichseitige Dreiecke, z. B. an *A*, (Fig. 168), die Dreiecke *AGJ*, *AHK*, *AJN*, *AKG* und *ANH*, deren Ebenen sich durchschneiden und an *A* eine fünfflächige oder fünfkantige Sternecke bilden. Mit Rücksicht auf diese besondere Form der Körperwinkel an den Ecken führt der vierte Körper (Fig. 171) den Namen „Sterneckiges Ikosaeder“ (bei Poinsot Ikosaeder siebenter Art, bei Cayley großes Ikosaeder).

Durch den gegenseitigen Durchschnitt der Dreiecksflächen bilden sich außer den genannten 30 Hauptkanten, den Seiten der Dreiecke, noch eine Menge secundärer Kanten, welche die Kanten der einspringenden Winkel sind; in Folge des gegenseitigen Durchschnittes werden die den Körper begrenzenden Seitenflächen nur theilweise nach außen treten.

ABCDE (Fig. 172) sei eine Seitenfläche des Dodekaeders, aus welchem das sterneckige Ikosaeder abgeleitet ist, *DE* und *DC* seien bis zu den Durchschnitten *G* und *H* mit der verlängerten *AB* fortgesetzt; das gleichseitige Dreieck *GHJ* über *GH* wird alsdann eine der Seitenflächen des sterneckigen Ikosaeders sein. Macht man $GA = GK = JL = JM = HN$, so erhält man zuerst durch die Verbindungslinien *JB* und *JA*, *HK* und *HL*, *GM* und *GN*, welche den Kanten der einspringenden Winkel an den Sternecken angehören, dann durch die Verbindungslinien *BK*, *KM* und *MB*, so wie *AN*, *NL*

und AL, in welchen sich die durch einen Eckpunkt des Kerndodekaeders gehenden Dreiecksflächen schneiden, sämmtliche secundäre Kanten des sterneckigen Ikosaeders. Die Zahl dieser secundären Kanten beträgt für jede Seitenfläche 12, im Ganzen also:

Fig. 172.



$$\frac{12 \cdot 20}{2} = 120.$$

Die secundären Kanten schließen nebst den Hauptkanten auf der Dreiecksfläche GHJ diejenigen Flächenräume ein, welche die äußeren Begrenzungsflächen des sterneckigen Ikosaeders bilden. In der obigen Figur 172 sind es die schraffirten neun Dreiecke, nämlich drei congruente stumpfwinkelige gleichschenkelige Dreiecke AOB u. s. w. und 6 congruente spitzwinkelige ungleichseitige Dreiecke BPH u. s. w. Das sterneckige Ikosaeder (Fig. 171) ist demnach äußerlich im Ganzen von $9 \cdot 20 = 180$ getrennten Dreiecken zweierlei Art begrenzt.

Man kann den Körper endlich noch in folgender Weise aus einem Kerne mit aufgesetzten sternförmigen Pyramiden entstanden denken. Auf jede der Seitenflächen eines Dodecaeders als Grundfläche setze man nach innen eine Pyramide, deren Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind, und nehme diese Pyramiden weg. In jeden der hohlen pyramidalen Räume dieses Körpers setze man eine von 10 an einander stoßenden, dem Dreiecke BPH (Fig. 172) congruenten Dreiecken gebildete reguläre sternförmige Ecke, und zwar so, daß die der BH gleichen Seiten äußere Kanten dieser Ecken werden und mit den Kanten des Kerndodekaeders in eine gerade Linie zu liegen kommen *).

*) Es wird hiernach leicht sein, aus Pappe oder Metallblech ein Modell jenes zusammengesetzten Körpers anzufertigen. Den Körper aus einem Netze von 180 zusammenhängenden Dreiecken darzustellen, ist nicht rathsam.

Daß die Seitenflächen der dem Dodekaeder entnommenen fünfseitigen Pyramiden gleichseitige Dreiecke sind, läßt sich wie folgt beweisen.

Man verbinde den Durchschnitt S der KH und NG (Fig. 172) mit A und B, denke auch K mit N verbunden.

Nach der Bemerkung auf Seite 168 ist:

$AG : AH = AH : HG$,

$AH : HG = JK : JG = KN : GH = KS : SH$, somit ist:

$AG : AH = KS : SH$.

Es ist also $SA \parallel GJ$; ebenso ist $SB \parallel JH$. Das Dreieck ABS ist somit gleichseitig.

Uebersichtstabelle
der vier sternförmigen regulären Körper *).

Benennung des regulären Polyeders.	Zahl der Grenzfl.	Zahl der Ecken.	Zahl der Kanten.	Art der Grenzflächen.	Art der Ecken.
12eckiges Sterndodekaeder...	12	12	30	5seitig und sternförmig.	5kantig gewöhnl. Art.
20eckiges Sterndodekaeder...	12	20	30	5seitig und sternförmig.	3kantig gewöhnl. Art.
Sterneckiges Dodekaeder.....	12	12	30	5seitig gewöhnlicher Art.	5kantig und sternförmig.
Sterneckiges Ikosaeder.......	20	12	30	3seitig.	5kantig und sternförmig.

*) Man vergleiche III., 39.

Anhang III.

Allgemeine Sätze über Polyeder. Beweis der Sätze III., 32 u. 33.

A. Beweis des Satzes III., 32*).

„Zwei convexe Polyeder, deren Grenzflächen beziehlich congruent und gleich geordnet sind, stimmen auch in den Neigungswinkeln der Grenzflächen überein, und sind also congruent oder symmetrisch."

Dem Beweise dieses Satzes müssen folgende Lehnsätze vorangehen:

Lehnsatz 1. Sind zwei Seiten einer dreikantigen Ecke (I., 54) eben so vielen Seiten einer andern Ecke paarweise gleich, und ist der von ihnen eingeschlossene Winkel bei der ersten kleiner als bei der zweiten, so ist auch die dritte Seite der ersten Ecke kleiner als die der zweiten. (Vergl. Planim. II., 26.)

Beweis. In den beiden dreikantigen Ecken $ABCD$ und $A'B'C'D'$ sei $\sphericalangle\, BAC = B'A'C'$, $BAD = B'A'D'$, der Flächenwinkel an AB aber kleiner als der an $A'B'$, so wird auch $\sphericalangle\, CAD < C'A'D'$ sein. Denn nimmt man

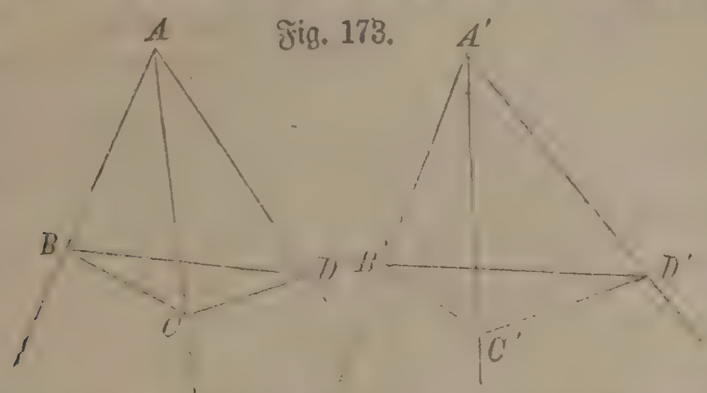


Fig. 173.

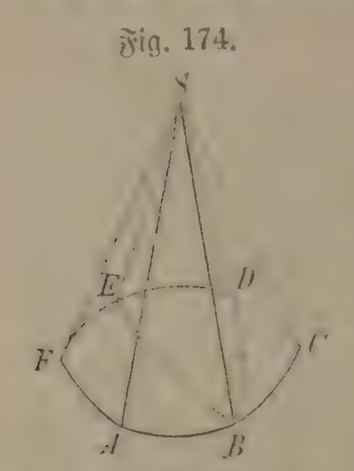
$A'B' = AB$, zieht BD und BC beide $\perp AB$, so wie $B'D'$ und $B'C'$ beide $\perp A'B'$ und verbindet C mit D, C' mit D', so ergibt sich aus der Congruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$, ABD und $A'B'D'$, daß $AC = A'C'$,

*) Anm. Euklid hatte mit Unrecht (XI. B. 10 Def.) als Definition hingestellt: „Gleiche und ähnliche Körper sind solche, die von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen begrenzt werden." Es ist dieses ein Lehrsatz, dessen Beweis Cauchy zuerst gegeben hat. S. Journal de l'école polytechnique, Cah. 16. pag. 96.

$AD = A'D'$, $BC = B'C'$, $BD = B'D'$. Nach der Voraussetzung ist aber $\sphericalangle\, CBD < C'B'D'$; daher nach Planim. II., 26 $CD < C'D'$ und hieraus nach Planim. II., 27 $\sphericalangle\, CAD < C'A'D'$.

Lehnsatz 2. Wenn man in einem convexen Körperwinkel, dessen Seiten alle, bis auf eine, constant oder gegeben sind (oder in dem ihm entsprechenden sphärischen Vielecke), einen der dieser Seite gegenüber liegenden Winkel vergrößert oder verkleinert, so jedoch, daß der Körperwinkel convex bleibt, so wird auch die veränderte Seite im ersten Falle vergrößert, im zweiten verkleinert.

Fig. 174.



Beweis. In dem Körperwinkel S, welchem das sphärische Vieleck $ABCDEF$ entspricht, sei die Seite ESD (ED des Vieleckes) veränderlich, alle übrigen seien gegeben oder constant. Verändert sich nun einer der gegenüber liegenden Winkel, etwa der $\sphericalangle\, ABC$, welcher dem Flächenwinkel an der Kante SB entspricht, und man theilt mittels der Ebenen BSE und BSD den Körperwinkel S in drei andere, so ist klar, daß, unter der gemachten Voraussetzung, die seitwärts jener Ebenen liegenden Körperwinkel $SBCD$ und $SBAFE$ unverändert bleiben, wogegen $\sphericalangle\, EBD$ sich in demselben Sinne und um eben so viel ändert als $\sphericalangle\, ABC$, vorausgesetzt, daß der Körperwinkel convex bleibt. Da nun BE und BD oder $\sphericalangle\, BSE$ und BSD unverändert bleiben, so ändert sich dem 1. Lehnsatze zufolge in dem Körperwinkel $SBDE$ die Seite ESD (oder Seite DE des Vieleckes) in demselben Sinne, wie der $\sphericalangle\, ABC$, d. h. sie wird mit ihm zugleich größer oder zugleich kleiner w. z. b. w.

Zusatz. Läßt man, statt des Winkels ABC allein, nach einander mehrere der Winkel, welche der Seite DE gegenüber liegen, zugleich zu- oder abnehmen, so tritt offenbar derselbe Erfolg für DE ein, indem jede neue Vergrößerung eines Winkels die schon größere Seite DE noch größer, jede Verminderung derselben, die schon kleinere noch kleiner macht. Die ganze Schlußweise setzt aber voraus, daß der Körperwinkel convex bleibt.

Lehnsatz 3. Wenn man die Winkel einer convexen Körperecke, deren Seiten constant sind, sich beliebig ändern läßt, hierauf mit dem Zeichen + alle Kanten bezeichnet, an welchen die Winkel größer, mit alle

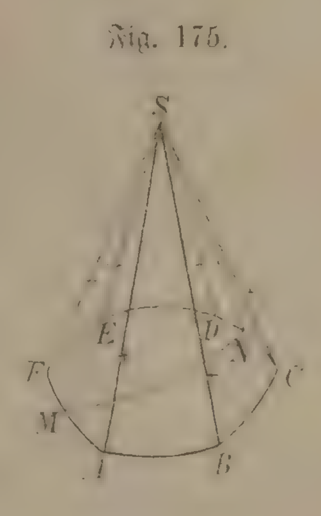
diejenigen, an welchen die Winkel kleiner geworden sind, so findet in der Aufeinanderfolge dieser Zeichen wenigstens viermal ein Wechsel Statt.

Beweis. Die Körperecke muß jedenfalls mehr als drei Seiten oder Kanten haben, denn sonst müßten, da die Seiten constant sind, es auch nach II., 37 die Winkel sein. Hat sie aber mehr als drei Seiten, so kann

1) nicht vorausgesetzt werden, daß alle Veränderungen der Winkel an ihr von derselben Art seien oder daß kein Zeichenwechsel Statt finde, weil sonst, nach dem vorigen Lehnsatze, wenigstens eine der Seiten sich ändern müßte;

2) auch kann nicht angenommen werden, daß nur zwei Zeichenwechsel Statt finden, oder daß einer einzigen Reihe von lauter + eine zweite von lauter — folge. Denn wären z. B. die Kanten *SA*, *SB* und *SC* der vorhin betrachteten Ecke mit +, die drei übrigen *SD*, *SE* und *SF* mit — bezeichnet, so ließe sich eine Diagonalebene *MSN* legen, auf deren eine Seite alle +, und auf deren andere Seite alle — fielen. Der Winkel *MSN* müßte sich dann aber, dem vorigen Lehnsatze zufolge, zugleich vergrößern und vermindern, was unmöglich ist;

Fig. 175.



3) eben so wenig können bloß drei Reihen von Zeichen vorkommen, weil, wollte man sie annehmen, die erste und dritte derselben aus gleichen Zeichen bestehen, daher sich aneinander schließen und nur eine Reihe bilden würden, wodurch man wieder auf 2) zurückkommt.

Es muß also wenigstens vier Zeichenwechsel geben.

Lehnsatz 4. Wenn eine convex-polyedrische Oberfläche eine einzige Oeffnung von m nicht in einer Ebene liegenden Seiten darbietet, so läßt sich diese Oeffnung stets durch eine zweite polyedrische Oberfläche von höchstens $m - 2$ Seitenflächen schließen, so daß diese zweite mit der ersten ein convexes ganz umschlossenes Polyeder bildet.

Es sei *ABCDEF* die gebrochene Linie, womit die erste Oberfläche endigt. Offenbar kann man stets durch drei der Ecken *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* eine Ebene legen, welche die übrigen Ecken und die ganze polyedrische Oberfläche auf einer Seite behält. Es sei *AEC* die auf diese Art erhaltene Seitenfläche.

Durch die Ecken A und C lege man abermals eine Ebene, welche die übrigen Ecken der Polyederfläche auf einer Seite behält, und drehe diese Ebene, bis sie mit einer neuen Ecke, z. B. mit B, zusammentrifft, so ist ACB eine neue Seitenfläche. Fährt man auf diese Art fort, so erhält man eine Reihe von Seitenflächen, welche zusammen die Oeffnung $ABCDEF$ schließen. Die Zahl derselben ist am größten, wenn sie durchaus dreiseitig sind; dann aber ist ihre Zahl $m - 2$.

Das so erhaltene Polyeder muß convex sein; denn wenn z. B. die Ebene EDC die Polyederfläche schnitte, so müßte die verlängerte Seite DC oder DE diese Fläche ebenfalls schneiden, sie wäre also nicht convex, was gegen die Annahme ist.

Nach Vorausschickung dieser Lehnsätze läßt sich nun der Hauptsatz: Zwei Polyeder sind congruent oder symmetrisch, wenn alle ihre Grenzflächen beziehlich congruent und in gleicher Weise geordnet sind, in folgender Art beweisen, wobei es nur darauf ankommt, zu zeigen, daß die Flächen- oder Neigungswinkel, welche die angrenzenden Seitenflächen in dem einen Polyeder P bilden, eben so groß sind, wie diejenigen, welche die congruenten Seitenflächen im anderen Polyeder P' bilden.

Gesetzt, diese Polyeder wären nicht congruent, so müßten die körperlichen Ecken von P rücksichtlich der Neigung der Seitenflächen entweder alle oder zum Theil verschieden sein von den Körperecken des Polyeders P'.

1. Fall. Sie seien alle verschieden. Betrachtet man nun P' als eine durch Veränderung der Neigungswinkel bewirkte Verwandlung von P, setzt, bei dieser Ansicht, das Zeichen $+$ auf die Kante jedes Flächenwinkels, der größer, und das Zeichen $-$ auf die Kante jedes Flächenwinkels, der kleiner geworden ist, so ist nach Lehnsatz 3 die Gesammtzahl n der Zeichenwechsel, die man findet, wenn man der Reihe nach die Körperwinkel von P durchgeht und die Eckenzahl dieses Polyeders, wie früher, mit E bezeichnet,

$$n \geqq 4E.$$

Andererseits kommt aber in Betracht, daß, da zwei auf einander folgende Kanten eines Körperwinkels immer nur einer Grenzfläche des Polyeders angehören, n auch die Gesammtzahl der Zeichenwechsel sein müsse, die man erhält, wenn man nach und nach die einzelnen Grenzflächen des Polyeders durchgeht.

Nun ist für jede dreiseitige Grenzfläche die Zahl der Zeichenwechsel höchstens 2, für jede vierseitige höchstens 4, ... allgemein, für jede $2n$ seitige und $(2n + 1)$ seitige, wie sich leicht einsehen läßt, höchstens $2n$. Bezeichnet man daher die Anzahl der dreiseitigen Grenzflächen mit a, die der vierseitigen mit b u. s. w., so muß

$$n \leqq 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f + 8g + \cdots$$

sein. Es ist aber auch, wenn man, wie im vorigen Anhange, die Zahl der Kanten mit K, die der Grenzflächen mit F bezeichnet,

$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + 8f + 9g + \cdots \text{ und}$$
$$F = a + b + c + d + e + \cdots; \text{ daher}$$
$$2(K - F) = a + 2b + 3c + 4d + 5e + \cdots$$

Nach dem Euler'schen Satze ist $K - F = E - 2$, also

$$4(E - 2) = 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \cdots.$$

Vergleicht man diese Summe mit der obigen $2a + 4b + 4c + 6d + 6e + \cdots$, so ergibt sich, daß $4(E - 2)$ größer als diese letztere, also auch jedenfalls $4(E - 2) > n$ oder $n < 4E - 8$ und um so mehr $n < 4E$ sein müsse, was dem Obigen $n \geqq 4E$ widerspricht. Es können daher nicht alle Körperecken hinsichtlich der Neigungswinkel verschieden sein.

2. Fall. Nur einige Körperecken seien verschieden, die übrigen gleich. $SABCDE$ sei eine dieser letztern, die in P und P' vorkommt. Nimmt man diese Körperecke S in beiden Polyedern weg und schließt die Oeffnung $ABCDE$ durch eine convexe polyedrische Fläche (Lehnsatz 4), so werden die Polyeder P und P' durch Q und Q' ersetzt, die weniger Grenzflächen, weniger Ecken und weniger Kanten haben als jene. Die Grenzflächen dieser neuen Polyeder sind beziehlich congruent wie die der vorigen. Fährt man so fort, so gelangt man (da die Polyeder P und P' als nicht congruent und nicht symmetrisch angenommen werden) nothwendig zu zwei letzten convexen Polyedern, T und T', deren Grenzflächen alle beziehlich congruent sind und in welchen kein Körperwinkel des einen einem Körperwinkel des anderen, rücksichtlich der Neigungswinkel an den Kanten derselben, gleich ist. Der zweite Fall ist somit auf den ersten zurückgeführt und eben so unmöglich wie dieser.

Demnach müssen alle Körperwinkel des einen Polyeders denen des anderen der Ordnung nach gleich und die Polyeder selbst entweder congruent oder symmetrisch sein.

B. Beweis des Satzes III., 33.

„Die Anzahl der zur völligen Bestimmung eines Polyeders nöthigen Stücke ist gerade der Zahl seiner Kanten gleich."

Beweis. Angenommen, das Polyeder sei von einer bestimmten Art, d. h. man kenne die Zahl seiner Grenzflächen, die Anzahl der Seiten einer jeden und die Ordnung, in der sie an einander liegen. Es kommt dann nur darauf an, zu untersuchen, wie viele Stücke (Linien und Winkel) wirklich noch gegeben sein müssen, um das Polyeder als ein ganz bestimmtes zu construiren.

Zu diesem Zwecke sehe man eine der Grenzflächen, um auf sie die Eckpunkte der übrigen zu beziehen, als Grundfläche des Polyeders an. Sie habe n Seiten; zu ihrer Bestimmung sind also (Planim. II., 11) $2n - 3$ Stücke nöthig. Außerhalb dieses n Eckes liegen $E - n$ Ecken des Polyeders. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume gegen eine gegebene Ebene sind aber immer 3 Stücke (Linien oder Winkel) nöthig; dieses würde $3(E - n)$ und, mit denen der Grundfläche zusammen gerechnet, im Ganzen $3(E - n) + 2n - 3 = 3E - n - 3$ Bestimmungsstücke erfordern. Diese Zahl ist aber zu groß. Bezeichnet man nämlich die Seitenzahl der übrigen Grenzflächen durch n', n'', n''' ...., so liegen immer n', n'', n''' .... Ecken des Polyeders in einer Ebene. Die Lage einer Ebene ist aber schon durch drei Punkte völlig bestimmt, und, wenn also die Lage der Ebene des n' Eckes einmal durch drei Punkte bestimmt ist, so braucht man zur Bestimmung der übrigen $n' - 3$ Eckpunkte jenes Vielecks nur noch $2(n' - 3)$ Bestimmungsstücke. Oben wurden $3(n' - 3)$ solcher Stücke für diese $n' - 3$ Eckpunkte, also $n' - 3$ zu viel gerechnet; dasselbe gilt eben so für alle übrigen Grenzflächen mit n'', n''' ... Seiten. Von der obigen Zahl $3E - n - 3$ muß also, um die richtige Zahl x der nötigen Bestimmungsstücke zu erhalten, die Summe $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \cdots\cdot$ in Abzug gebracht werden, oder es ist:

$$x = 3E - n - 3 - (n' - 3) - (n'' - 3) - (n''' - 3) - \cdots$$

oder $x = 3E - (n + n' + n'' + n''' + \cdots) - 3 + 3\,(F - 1)$.
Aber $n + n' + n'' + \cdots\cdots = 2K$, wo K die Zahl der Kanten, F die der Grenzflächen des Körpers bezeichnet; daher:

$$x = 3E - 2K + 3F - 6 = 3\,(E + F) - 2K - 6.$$

Nach dem Euler'schen Satze ist $E + F = K + 2$, folglich:

$$x = 3\,(K + 2) - 2K - 6 = K.$$

Die Zahl x der Bestimmungsstücke ist also der Zahl der Kanten gleich.

Bemerkung. Aus dem Satze darf man nicht schließen, daß durch jede beliebige k Stücke ein Polyeder völlig bestimmt werde, indem ja z. B. ein Prisma es nicht durch seine Kanten allein ist; der Sinn ist nur der, daß die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke eben so groß wie die Zahl der Kanten sei; wobei es aber weiter auf die richtige Auswahl dieser Stücke ankommen würde.

Anhang IV.

Sätze und Aufgaben über das Tetraeder (die dreiseitige Pyramide).

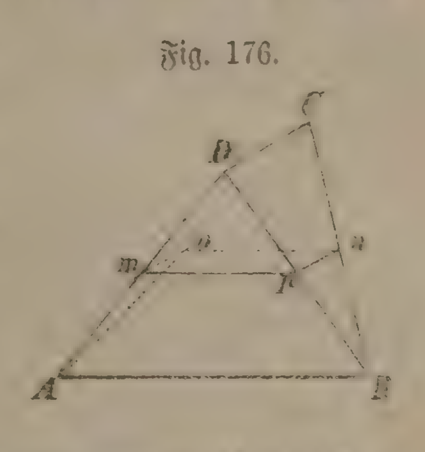


Fig. 176.

1. Satz. Durchschneidet man die Seiten eines Tetraeders $ABCD$ durch eine Ebene $mpno$, welche zwei gegenüberstehenden Kanten AB und DC parallel ist, so ist das hierdurch entstehende Parallelogramm $mpno$ ein Maximum, wenn die Durchschnittsebene von den beiden Kanten gleich weit absteht, oder wenn m, p, n und o die Mitten der Kanten sind.

Beweis. Sämmtliche Durchschnittsparallelogramme, welche den Kanten AB und DC parallel sind, haben gleiche Winkel, verhalten sich also dem Inhalte nach, wie die Rechtecke aus zwei an einander liegenden Seiten (Planim. V., 81). Dasjenige Parallelogramm ist also ein Maximum, für welches das Rechteck $mp \cdot pn$ ein Maximum ist. Es ist aber:

$$mp : AB = Dp : DB$$
$$pn : DC = pB : DB; \text{ mithin:}$$
$$mp \cdot pn : AB \cdot DC = Dp \cdot pB : DB^2.$$

Da $AB \cdot DC$ und DB^2 constant sind, so wird $mp \cdot pn$ ein Maximum, wenn $Dp \cdot pB$ ein Maximum ist, wenn also p in der Mitte von DB liegt. (Planim. IV., 8, Zus.)

Zusatz. Je zwei von dem größten Querschnitte $mpno$ gleich weit entfernte Querschnitte sind einander gleich.

2. Satz. Die Summe der Quadrate zweier gegenüberstehenden Kanten eines Tetraeders ist gleich der doppelten Summe der Quadrate der Verbindungslinien der Mittelpunkte je zweier der anderen gegenüberstehenden Kanten.

Der Beweis ist mit Hülfe des Satzes III., 16 der Stereometrie und IV., 29, Zus. der Planimetrie zu führen.

3. Satz. In jedem Tetraeder ist die Summe der Quadrate zweier gegenüberstehenden Kanten nebst dem vierfachen Quadrate der Geraden, welche ihre Mitten verbindet, gleich der Summe der Quadrate der übrigen Kanten.

Um zu beweisen, daß (s. Fig. 176) $AC^2 + DB^2 + 4po^2 = DC^2 + AB^2 + AD^2 + BC^2$, suche man zuerst mit Hülfe von IV., 29 Planim. die Summen $DC^2 + BC^2$, dann $AB^2 + AD^2$ zu bilden, wodurch sich alsdann durch nochmalige Anwendung desselben Satzes der Planimetrie die Richtigkeit der Behauptung ergibt.

4. Satz. In jedem Tetraeder ist die Summe der Quadrate der sechs Kanten der 4fachen Summe der Quadrate der drei Geraden gleich, welche die Mitten der gegenüberstehenden Kanten verbinden.

5. Satz. Sind drei Seitenflächen eines Tetraeders an der Ecke, wo sie zusammenstoßen, rechtwinkelig, so ist die Summe ihrer Quadrate dem Quadrate der vierten Seitenfläche gleich, vorausgesetzt, daß man die Inhalte aller vier Seitenflächen nach einem gemeinschaftlichen Maaße in Zahlen ausdrückt.

Zum Beweise suche man den Inhalt zweier Seitenflächen durch ihre Katheten, den der dritten durch die Hypotenuse und die Höhe auf derselben auszudrücken. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich hiernach leicht.

Bemerkung. Dieser Satz entspricht dem pythagorischen Lehrsatze.

6. Satz. **Die durch eine Kante und die Mitte der gegenüberliegenden gelegte Ebene theilt das Tetraeder in zwei gleich große Theile; die Durchschnittsfläche ist dabei kleiner als die halbe Summe der beiden nicht geschnittenen Grenzflächen.**

Das Erste folgt aus V., 12. Zum Beweise des zweiten projicire man die beiden letztgenannten Flächen auf die erstere und bemerke, daß die Projection kleiner ist, als die projicirte Ebene.

Beweis leicht.

7. Satz. **Die Summe der Quadrate der drei an die Spitze eines Tetraeders stoßenden Kanten ist dem dreifachen Quadrate der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte von den Ecken der Grundfläche (II., 53 Planim.) nebst der Summe der Quadrate der Abstände dieses Schwerpunktes von der Grundfläche gleich.**

Der Beweis des Satzes stützt sich auf Plan. IV., 29 und X., 1 und 6.

8. Satz. **Errichtet man auf den Seitenflächen eines Tetraeders, und zwar im Mittelpunkte des einer jeden umgeschriebenen Kreises Perpendikel, so treffen diese in einem Punkte zusammen.**

Der Beweis leicht.

9. Satz. **Verbindet man jede der vier Ecken eines Tetraeders mit dem Schwerpunkte der gegenüberstehenden Seitenfläche, so durchschneiden sich die Verbindungslinien in einem Punkte, welcher der Schwerpunkt des Tetraeders heißt. Die Entfernung dieses Schwerpunktes vom Schwerpunkte der Grundflächen beträgt ¼ der Verbindungslinie dieses letzteren mit der gegenüberstehenden Spitze des Tetraeders.**

Die Beweise mit Hülfe von Planim. II., 53 und V., 39 zu führen.

Zusatz. Sämmtliche Ebenen, welche durch die Kanten eines Tetraeders und die Mittellinien der Gegenseiten gehen, durchschneiden sich in einem Punkte, dem Schwerpunkte.

10. Satz. **Der Durchschnittspunkt der drei geraden Linien, welche die Mitten je zweier gegenüberstehenden Kanten eines Tetraeders mit einander verbinden (III., 16 Zus.), ist der Schwerpunkt des Tetraeders.**

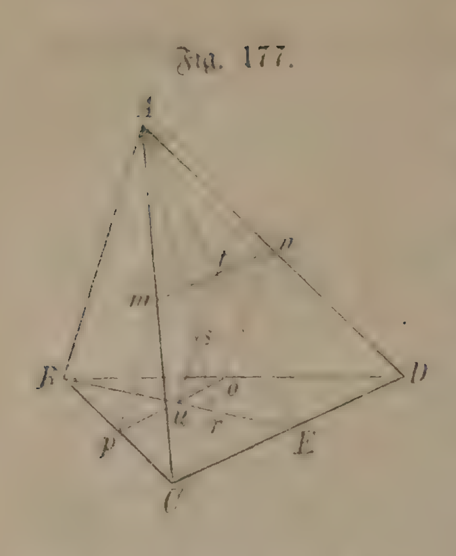


Fig. 177.

Beweis. Es sei $ABCD$ das gegebene Tetraeder, m, n, o und p seien die Mittelpunkte der Kanten AC, AD, BD und BC. Man verbinde A und B mit der Mitte E der Kante CD. Die Durchschnitte t und u der Linien AE und BE mit mn und po sind offenbar die Mitten von mn und po. Die Mitte s der Verbindungslinie tu ist derselbe Punkt, in welchem sich die Diagonalen des Parallelogrammes $mnop$ treffen, in welchem sich also sämmtliche Verbindungslinien der Mitten je zweier gegenüber stehender Kanten treuzen. Dieser Punkt s ist zugleich der Schwerpunkt des Tetraeders; denn zieht man As bis zum Durchschnitte r mit BE, so ist:

$$su = \tfrac{1}{2}ut = \tfrac{1}{4}AB, \text{ also } ru = \tfrac{1}{4}rB, \text{ oder } ru = \tfrac{1}{3}uB;$$

hieraus und weil $uB = uE$, folgt leicht $rE = \frac{1}{3}BE$. Der Punkt r ist somit der Schwerpunkt des Dreieckes BCD. Da ferner $su = \frac{1}{4}AB$, so ist $rs = \frac{1}{4}rA$, somit s der Schwerpunkt des Tetraeders (S. 9).

11. Satz. Die Summe der Quadrate aller sechs Kanten eines Tetraeders ist der vierfachen Summe der Quadrate der Verbindungslinien des Schwerpunktes des Tetraeders mit den Eckpunkten desselben gleich.

Aus Satz 7 zu beweisen.

12. Aufgabe. Eine Kugel zu construiren, welche die Seitenflächen eines gegebenen Tetraeders berührt.

Die Auflösung geschieht mit Hülfe des Durchschnittes dreier Ebenen, welche die von einer Seitenfläche mit den drei benachbarten gebildeten Flächenwinkel halbiren.

Zusatz. Sämmtliche sechs Ebenen, welche die Flächenwinkel an den Kanten des Tetraeders halbiren, schneiden sich in einem Punkte.

Wie viel Kugeln gibt es, welche die Seitenflächen eines Tetraeders oder deren Erweiterungen berühren können?

13. Satz. Sämmtliche Ebenen, welche auf den Kanten eines Tetraeders in ihren Mitten senkrecht stehen, treffen in einem Punkte,

dem Mittelpunkte der um das Tetraeder beschriebenen Kugel, zusammen.

Beweis leicht.

14. Satz. Legt man durch den Halbirungspunkt einer jeden Kante eine Parallele mit der gegenüberstehenden Kante, so entsteht ein neues Tetraeder, welches dem gegebenen Tetraeder congruent ist.

Anleitung zum Beweise. Zieht man durch die Halbirungspunkte p und n der halbirten Kanten BD und BC, des Tetraeders $ABDC$ (Fig. 176) mit den gegenüberstehenden Kanten AC und AD zwei parallele Linien, so läßt sich leicht nachweisen, daß diese Linien, weil $pn \parallel mo$, in einer Ebene liegen, welche der Ebene des Dreiecks DAC parallel ist, und daß dieselben sich in einem Punkte A' treffen, so daß $\triangle A'pn \cong \triangle Amo$. Man erhält also hierdurch einen dem Punkte A correspondirenden Punkt A'. Auf dieselbe Weise erhält man die übrigen correspondirenden Punkte B', C' und D', und es läßt sich leicht darthun, daß das hierdurch entstehende Tetraeder dem gegebenen congruent ist.

1. Zusatz. Dasselbe Tetraeder wird man erhalten, wenn man durch die vier Seiten des Parallelogramms $mpno$ mit den gegenüberstehenden Seitenflächen des Tetraeders parallele Ebenen legt.

2. Zusatz. Beide Tetraeder haben denselben Schwerpunkt.

Der Beweis stützt sich auf Satz 10.

3. Zusatz. Die Mittelpunkte der um beide Tetraeder beschriebenen Kugeln liegen mit dem Schwerpunkte in gerader Linie, und zwar so, daß letzterer in der Mitte zwischen den beiden ersten liegt.

Der Beweis ist durch Umdrehung des einen Tetraeders um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt bis zur Deckung mit dem anderen Tetraeder zu führen.

15. Satz. Halbirt man die sechs Kanten eines Tetraeders und legt durch jeden Halbirungspunkt eine Ebene senkrecht gegen die gegenüberstehende Kante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkte.

Beweis. Legt man durch den Halbirungspunkt einer jeden Kante mit der gegenüberstehenden Kante eine Parallele, so kann der Beweis dieses Satzes auf die Sätze 14 und 13 gestützt werden.

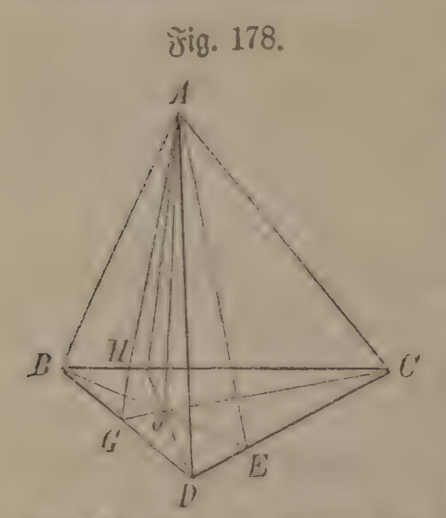
Zusatz. Der Durchschnittspunkt der sechs Ebenen liegt mit dem Schwerpunkte des Tetraeders und dem Mittelpunkte der um das Tetraeder

beschriebenen Kugel auf einer geraden Linie, und zwar so, daß der Schwerpunkt in der Mitte liegt.

Der Beweis gründet sich auf Satz 14, 3. Zus.

16. Satz. Stehen in einem beliebigen Tetraeder zwei Paar gegenüberstehender Kanten auf einander senkrecht, so gilt dasselbe auch vom dritten Paare. (Fig. 178.)

Fig. 178.



Beweis. Es sei $AB \perp DC$, $AC \perp BD$. Um zu beweisen, daß $AD \perp BC$ sei, fälle man von A und B auf DC, und von A und C auf BD Senkrechte. Daraus, daß $AB \perp DC$, ergibt sich, daß die aus A und B gefällten Senkrechten in einem Punkte E der Linie DC zusammentreffen, und eben so ergibt sich daraus, daß $AC \perp BD$, daß die aus A und C auf BD gefällten Senkrechten in einem Punkte G der Linie BD zusammenstoßen. Verbindet man A mit dem Durchschnitte o der Linien BE und CG, so ist Ao der Durchschnitt der beiden auf BDC senkrecht stehenden Ebenen AGC und AEB, mithin steht Ao auf der Ebene BDC senkrecht. Verlängert man nun noch die Linie Do bis zum Durchschnitte H mit BC, so ist, da $DH \perp BC$ (Planim. II., 52), auch $AH \perp BC$ (Stereom. I., 26). Die Linie BC steht also auf der Ebene des Dreieckes ADH senkrecht, somit $BC \perp AD$.

17. Satz. Stehen in einem Tetraeder $ABCD$ zwei gegenüberstehende Kanten auf einander senkrecht, so schneiden sich jedes Mal die von den beiden Endpunkten einer der Kanten auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällten Senkrechten in einem Punkte.

Beweis. Steht AC (Fig. 178) auf BD senkrecht, so werden die Perpendikel von A und C auf BD diese BD in einem Punkte G treffen. Leicht ist hiernach einzusehen, daß die Ebene des Dreieckes AGC, welche auf BD senkrecht steht, sowohl das Perpendikel von A auf DBC, als das von C auf ADB enthalten müsse, daß also die beiden Perpendikel sich nothwendig schneiden müssen. — Eben so werden die beiden anderen von B auf ADC und von D auf ABC gefällten Perpendikel in einem Punkte sich schneiden.

18. Satz. Durchschneiden sich die von den Endpunkten einer Kante auf die gegenüberstehenden Seitenflächen gefällten Perpendikel in einem Punkte, so steht jene Kante auf der gegenüberliegenden Kante senkrecht. Umkehrung des vorhergehenden Satzes.

19. Satz. Durchschneiden sich in einem Tetraeder zwei Höhenperpendikel, so schneiden sich auch die beiden übrigen. — Leicht.

20. Satz. In einem Tetraeder, dessen gegenüberstehende Kanten paarweise auf einander senkrecht stehen, durchschneiden sich sämmtliche Höhenperpendikel in einem Punkte.

Der Beweis leicht.

21. Satz. Durchschneiden sich in einem Tetraeder drei Höhenperpendikel in einem Punkte, so geht das vierte durch denselben Punkt.

Beweis mit Hülfe der vorhergehenden Sätze leicht.

22. Satz. Berührt eine Kugel die sechs Kanten eines Tetraeders, so sind die drei Summen paarweise gegenüberstehender Kanten einander gleich.

Der Beweis leicht, wenn man den Satz zu Grunde legt, daß die von einem Punkte außerhalb einer Kugel an dieselben gelegten berührenden Geraden einander gleich sind.

23. Satz. Umgekehrt: Sind die drei Summen paarweise gegenüberstehender Kanten einander gleich, so berührt eine Kugel, welche drei in derselben Ecke zusammenstoßende Kanten und eine der drei übrigen berührt, auch die beiden anderen dieser übrigen Kanten.

Der Beweis ist indirect zu führen.

24. Aufgabe. Eine Kugel zu construiren, welche die sechs Kanten eines Tetraeders berührt.

Auflösung leicht. — Determination.

25. Satz. Berührt eine Kugel die sechs Kanten eines Tetraeders, so ist jede der von der Spitze des Tetraeders an die Kugel gehenden Berührenden gleich einem Drittel der Summe der an jene Spitze stoßenden

Kanten vermindert um ein Sechstel der Summe der die Grundfläche umschließenden Kanten.

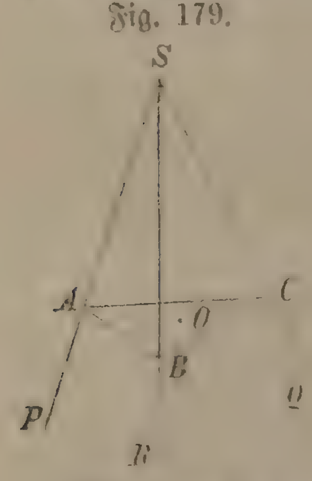
Der Beweis leicht.

26. Satz. **Der geometrische Ort für alle Punkte im Raume, deren Summe der Quadrate der Entfernungen von den Eckpunkten eines Tetraeders eine constante ist, ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Schwerpunkt des Tetraeders ist.**

Der Beweis leicht mit Hülfe der Planim. IV., 29 und X., 6.

27. Aufgabe. **Durch einen Punkt B in der Kante SR einer beliebigen dreiseitigen Körperecke S eine Ebene BAC so zu legen, daß die drei an S stoßenden Seitenflächen des Tetraeders gleichen Inhaltes werden.**

Fig. 179.



Auflösung. Ist ABC (Fig. 179) die verlangte Ebene und sind die drei Seitenflächen SAB, SBC und SAC einander gleich, so müssen offenbar die auf denselben stehenden Höhenperpendikel des Tetraeders auch einander gleich werden. Da die Senkrechte von B auf SAC bekannt ist, so kommt es nur darauf an, auf SP und SQ Punkte A und C zu finden, deren Abstände von den gegenüberstehenden Seitenflächen bekannt sind.

Man versuche die Aufgabe durch eine ebene Construction nach Anleitung von I., 70 zu lösen, wenn die drei Winkel BSP, QSB und PSQ in einer Ebene neben einander liegen und SB als bekannt angenommen wird.

28. Satz. **Ist $SABC$ (Fig. 179) ein Tetraeder, dessen Seitenflächen SAB, SBC und SAC einander gleich sind, so ist die Summe der Perpendikel, welche von einem beliebigen Punkte O in der Ebene der Grundfläche ABC auf die drei Seitenflächen gefällt werden, constant.**

Beweis. Ist jedes der drei gleichen von A, B und C auf die gegenüberstehende Seitenfläche gefällten Perpendikel $= h$, heißen ferner die von O auf SBC, SCA und SAB gefällten Perpendickel h', h'' und h''' und bezeichnet man jede der Seitenflächen SAB, SCA und SBC mit P und den Inhalt der Pyramide mit J, so ist:

$3J = Ph$ und:

$3J = Ph' + Ph'' + Ph''' = P(h' + h'' + h''')$; folglich:

$h = h' + h'' + h'''$.

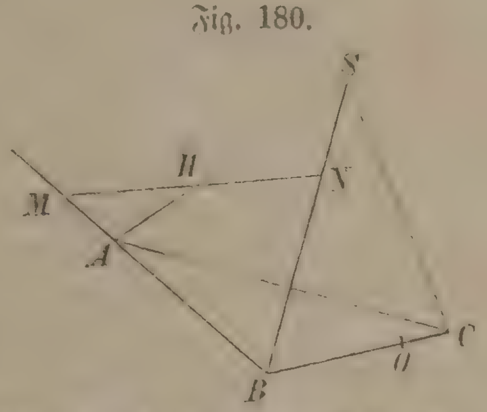
1. Zusatz. Der Satz findet nicht allein für die Punkte innerhalb der Grundfläche ABC, sondern auch für alle Punkte außerhalb derselben Statt; leicht ist darzuthun, daß alsdann statt $h' + h'' + h'''$, je nach der Lage des Punktes O entweder $h' + h'' - h'''$ oder $h' - h'' + h'''$ oder auch $h' - h'' - h'''$ u. s. w. zu setzen ist.

2. Zusatz. Jede mit der Grundfläche ABC der Pyramide $SABC$ parallele Ebene ist der geometrische Ort für alle Punkte, für welche die Summe der Abstände von den vier Seitenflächen des Tetraeders constant ist.

Beweis leicht.

29. Aufgabe. Auf der Seitenkante SA eines beliebigen Tetraeders $SABC$ einen Punkt H zu finden, so daß die Summe der Abstände dieses Punktes von den gegenüberstehenden Seitenflächen SBC und ABC einer gegebenen geraden Linie p gleich werde.

Fig. 180.



Auflösung. Bestimmt man auf den drei Kanten BA, BS und BC der an die Grundfläche stoßenden körperlichen Ecke B die drei Punkte M, N und O, so daß die Perpendikel von denselben auf die gegenüberstehenden Seitenflächen der Ecke der gegebenen Linie p gleich werden, so wird die durch MNO gelegte Ebene die Linie SA in einem Punkte H treffen, der nach dem vorigen Satze die verlangte Eigenschaft hat. Diesen Durchschnittspunkt wird man aber am einfachsten durch Verbindung des Punktes M mit N erhalten, wobei also O überflüssig ist.

30. Aufgabe. Den geometrischen Ort aller Punkte zu finden, für welche die Summe der Entfernungen von den vier Seitenflächen eines Tetraeders $SDGL$ einer gegebenen Linie p gleich wird.

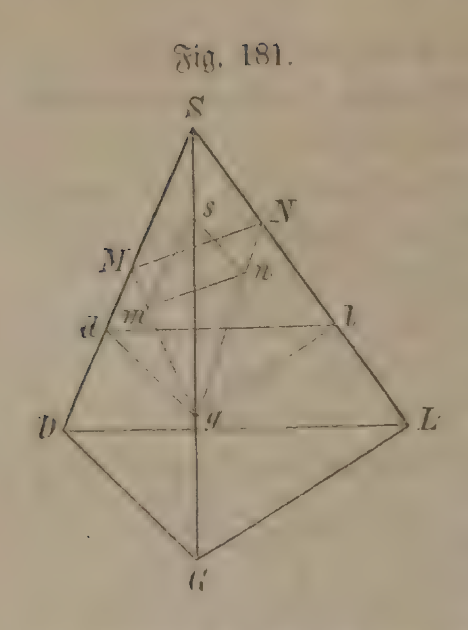


Fig. 181.

Auflösung. Man suche auf den Seitenkanten SG, SD und SL der gegebenen Pyramide drei Punkte g, M und N, so daß die Summe der Perpendikel von jedem dieser Punkte auf die gegenüberstehenden Seitenflächen $= p$ werde (29). Legt man nun durch M, g und N eine Ebene MgN, so ist dieselbe der verlangte geometrische Ort.

Beweis. Es mögen der Abkürzung wegen die von einem beliebigen Punkte m auf die den Ecken S, D, G, L gegenüberstehenden Seitenflächen Σ, Δ, Γ, Λ gefällten Perpendikel bezüglich mit $m\Sigma$, $m\Delta$, $m\Gamma$ und $m\Lambda$ bezeichnet werden. Durch den Punkt g sei eine Ebene dgl, parallel der Grundebene DGL gelegt, und der Abstand eines beliebigen Punktes m von dieser Ebene dgl sei mit $m\sigma$ bezeichnet. Bei dem Beweise sind zwei Fälle in Bezug auf die Lage des Punktes in der Ebene MNg zu unterscheiden. Der Punkt m liegt nämlich entweder auf dem Umfange des Dreieckes MNg oder nicht.

I. Es möge m auf der Linie Mg liegen. Es ist also nach der eingeführten Bezeichnungsweise darzuthun, daß:

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = p \text{ sei.}$$

Nach der Voraussetzung ist:

$$g\Gamma + g\Sigma = M\Sigma + M\Delta = p \qquad (1).$$

Zieht man $g\Sigma$ ab, so wird:

$$g\Gamma = M\sigma + M\Delta \qquad (2).$$

Man lege durch m eine Ebene $msn \parallel MSN$, alsdann entsteht eine Pyramide $gmsn$, der $gMSN$ ähnlich ist, und für beide Pyramiden ist die Ebene gdl eine ähnlich liegende. Es haben somit die Punkte g, m, s und n in Bezug auf ihre Entfernungen von den Gegenflächen des Tetraeders und der Ebene gdl dieselben Eigenschaften wie die correspondirenden Punkte g, M, S, N in Bezug auf ihre Gegenflächen und dieselbe Ebene gdl. Bezeichnet man die Abstände des Punktes g von der Ebene smn mit $g\gamma$, so wird also entsprechend (2):

$$g\gamma = m\sigma + m\Delta \qquad (3).$$

Setzt man $m\Gamma$ hinzu, so ist

$$m\Gamma + g\gamma \text{ d. i. } g\Gamma = m\sigma + m\Delta + m\Gamma \qquad (4).$$

Setzt man nun $g\Sigma$ hinzu und berücksichtigt, daß $m\sigma + g\Sigma = m\Sigma$, so ist:

$$g\Gamma + g\Sigma = m\Sigma + m\Delta + m\Gamma \qquad (5).$$

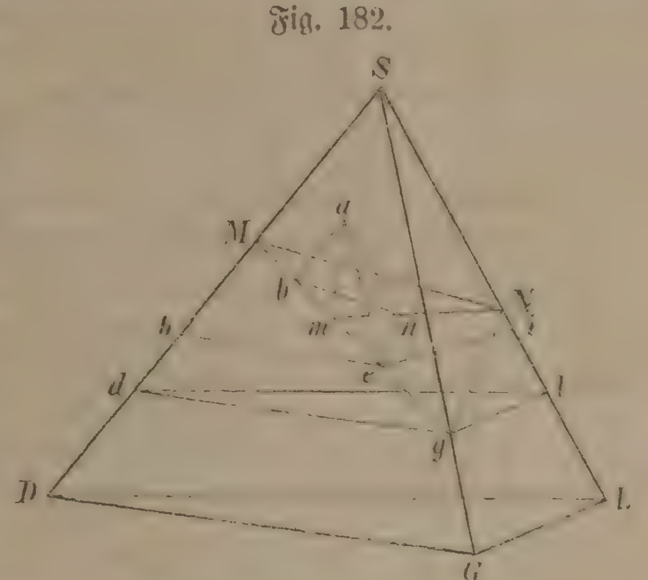
Da aber $g\Gamma + g\Sigma = p$ ist, so hat der Punkt m der Linie gM die Eigenschaft, daß die Summe der Entfernungen desselben von den Seitenflächen des Tetraeders $= p$ ist. Da $m\Lambda = 0$ ist, so ist also:

$$m\Sigma + m\Gamma + m\Delta + m\Lambda = p \qquad (6).$$

II. Es liege der Punkt n innerhalb des Dreieckes MgN.

Man verbinde N mit n, verlängere Nn bis zum Durchschnitte m mit gM, ziehe $ne \parallel Ng$, $nb \parallel NM$ und vollende über neb das dem Tetraeder $SMNg$ ähnliche Tetraeder $abne$, endlich lege man noch durch e mit dgl die parallele Ebene hei. Man bezeichne die aus a, b und n auf die Ebene hei gefällten Perpendikel mit $a\alpha$, $b\alpha$ und $n\alpha$, die von b, n und e auf die gegenüberstehenden Seiten des Tetraeders $aben$ gefällten Perpendikel mit $b\beta$, $n\nu$, $e\varepsilon$. Es ist nun:

Fig. 182.



$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = g\Gamma + g\Sigma = N\Sigma + N\Lambda \qquad (7).$$

Zieht man $g\Sigma$ von beiden Seiten ab, so wird, da $m\Sigma - g\Sigma = m\sigma$:

$$m\sigma + m\Delta + m\Gamma = N\sigma + N\Lambda \qquad (8).$$

Da die beiden Tetraeder $aben$ und $SMgN$ ähnlich sind und der Punkt m für beide ein ähnlich liegender Punkt ist, so muß (8) entsprechend auch:

$$m\alpha + m\beta + m\varepsilon = n\alpha + n\Lambda \text{ sein} \qquad (9).$$

Setzt man zu beiden $e\Sigma$ hinzu, so muß,

da $m\alpha + e\Sigma = m\Sigma$, $n\alpha + \varepsilon\Sigma = n\Sigma$ ist:

$$m\Sigma + m\beta + m\varepsilon = n\Sigma + n\Lambda \text{ sein} \qquad (10).$$

Setzt man ferner $e\Delta = n\Delta$ beiderseits hinzu, und berücksichtigt, daß $m\beta + e\Delta = m\Delta$, so ist:

$$m\Sigma + m\Delta + m\varepsilon = n\Sigma + n\Lambda + n\Delta \qquad (11).$$

Fügt man nun noch endlich $b\Gamma = n\Gamma$ beiderseits hinzu, und berücksichtigt man, daß $m\varepsilon + b\Gamma = m\Gamma$ ist, so wird:

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = n\Sigma + n\Delta + n\Delta + n\Gamma \quad (12).$$

Es ist aber nach dem ersten Falle

$$m\Sigma + m\Delta + m\Gamma = p, \text{ folglich:}$$

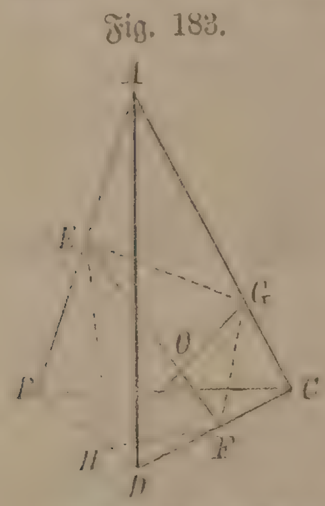
$$n\Sigma + n\Delta + n\Gamma + n\Delta = p.$$

Zusatz. Leicht läßt sich erkennen, wie der Satz sich umändert, wenn der Punkt m zwar in der Ebene des Dreieckes gMN, aber außerhalb der Dreiecksfläche zu liegen kommt.

31. Satz. Die Linie, welche die Mittelpunkte zweier gegenüberstehenden Kanten eines Tetraeders verbindet, halbirt jede durch dieselbe und durch zwei andere gegenüberstehende Kanten gehende Gerade.

Beweis. Eine gerade Linie treffe die Verbindungslinie EF der Mittelpunkte E und F der Kanten AB und DC in O, die gegenüberstehenden Kanten AC und BD in G und H. Zum Beweise, daß $GO = OH$ sei, denke man sich durch die beiden windschiefen Linien AC und BD Parallelebenen construirt. Legt man durch einen der Halbirungspunkte, etwa E, eine parallele Ebene mit jenen beiden, so muß dieselbe offenbar auch durch den andern Halbirungspunkt F gehen (I., 41). Es geht somit diese Ebene sowohl durch die Linie EF als durch den Punkt O und halbirt also auch nach demselbigen obigen Satze (I., 41) die GH in O.

Fig. 183.



1. Zusatz. Der obige Satz läßt sich auch so ausdrücken: Durchschneidet in einem windschiefen Vierecke eine gerade Linie die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberstehenden Seiten, und zugleich die beiden anderen gegenüberstehenden Seiten, so wird dieselbe von jener Verbindungslinie halbirt.

2. Zusatz. Legt man durch die Verbindungslinie EF eine beliebige Ebene, so halbirt die Linie EF das durch den Durchschnitt der Ebene mit den Seiten des Tetraeders entstehende Viereck.

Der Beweis leicht.

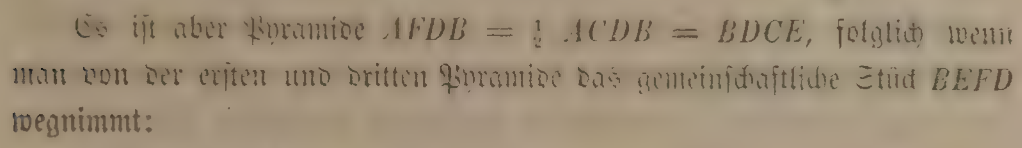
32. Satz. Jede durch die Verbindungslinie der Mittelpunkte E und F zweier gegenüberstehenden Kanten eines Tetraeders gehende Ebene $GEHF$ halbirt das Tetraeder.

Fig. 184.

Beweis. Man verbinde B und C mit E, ferner A und D mit F. Da die von den Endpunkten der in E halbirten Linie AD auf die durch E gehende Ebene $GEHF$ gefällten Perpendikel einander gleich sind, so haben die beiden Pyramiden $AEHF$ und $DGEF$ gleiche Höhen, und da sie nach dem vorhergehenden Satze Zus. 2 auch noch gleiche Grundflächen EHF und GEF haben, so ist:

1) Pyramide $AEHF = DGEF$; eben so ist:

2) Pyramide $BEFG = CEHF$.



Es ist aber Pyramide $AFDB = \frac{1}{2}\ ACDB = BDCE$, folglich wenn man von der ersten und dritten Pyramide das gemeinschaftliche Stück $BEFD$ wegnimmt:

3) Pyramide $AEFB = DEFC$.

Durch Addition von 1, 2 und 3 erhält man:

$$ABGEFH = CDGEFH.$$

Oder einfacher:

$\frac{1}{2}\ ABCD = ABDF = ABEFG + EFDG = ABEFG + EFHA = AHFGB$, also.

$$AHFGB = \frac{1}{2}\ ABCD.$$

Anhang V. zu IV. 32.

Stereographische Projection.

A. Allgemeine Sätze.

Unter stereographischer Projection versteht man die perspectivische Entwerfung der Kugelfläche auf die Ebene eines ihrer größten Kreise, wenn dabei der Ort des Auges (das Projectionscentrum), von dem aus die Entwerfungslinien gezogen werden, in einem der beiden Pole oder sphärischen Mittelpunkte jenes Kreises genommen wird. Dieser Kreis heiße kurz der Grundkreis; seine Ebene ist die des Entwurfs oder die Projectionsebene, wird auch wohl kurz die Tafel genannt; seine Mitte ist der sogenannte Augenpunkt. Diesem gerade gegenüber auf der Kugel liegt die Mitte der zu projicirenden Kugelhälfte; die Projection dieser Mitte fällt in den Augenpunkt.

Die stereographische Projection zeichnet sich durch die folgenden Eigenschaften aus, welche sie zur Entwerfung von Theilen der künstlichen Erd- und Himmelskugel besonders brauchbar macht.

1. **Die Projection eines Kugelkreises, welcher durch das Auge geht, ist eine gerade Linie, deren Richtung die Mitte des Grundkreises trifft.**

Denn da der Kreis durch das Auge geht, so fallen alle Entwerfungslinien nach ihm in seine Ebene. Die Projection des Kreises ist daher die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Tafel, und diese geht durch den Augenpunkt oder die Mitte des Grundkreises.

2. **Die Projection eines der Tafel parallelen Kreises ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt der des Grundkreises ist.**

Da nämlich der Kreis der Tafel parallel sein soll, so ist der Kegel, in welchen alle Entfernungslinien dieses Kreises fallen, ein gerader, dessen Basis der Tafel parallel ist. Der Durchschnitt der Tafel mit diesem Kegel d. i. die Projection des in Rede stehenden Kreises ist daher (IV., 22, c.) selbst ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Achse des Kegels, also auch in der Mitte des Grundkreises liegt.

3. **Auch die Projection jedes anderen der Tafel nicht parallelen Kugelkreises ist, wofern er nicht durch das Auge geht, selbst ein Kreis.**

Denn die vom Auge aus nach dem Umfange des projicirten Kreises gezogenen Entwerfungslinien liegen im Mantel eines schiefen Kegels, dessen Spitze das Auge und dessen Basis jener Kreis ist. Diesem Kegel ist die Kugel umgeschrieben, und da der nach dem Auge gehende Radius dieser Kugel senkrecht auf der Projectionsebene oder Tafel steht, so ist nach IV., 32 der Durchschnitt dieser Tafel mit dem Kegel ein Wechselschnitt des letzteren, also nach IV., 31 ein Kreis.

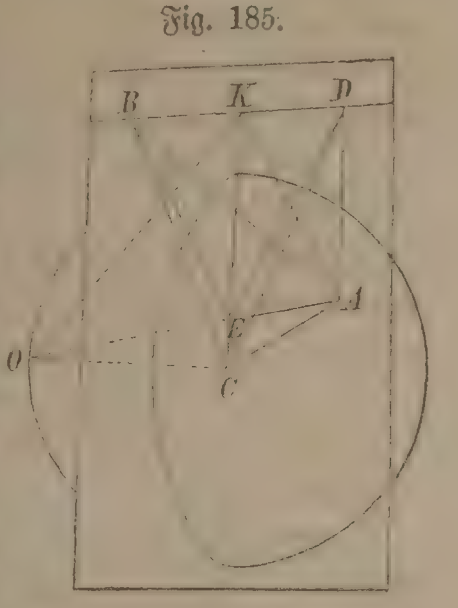
4. **Die Mittelpunkte der Projectionen aller Kugelkreise, die eine gemeinschaftliche Sehne haben, nach welcher ihre Ebenen sich schneiden, liegen in einer geraden Linie, welche auf der Projection jener Sehne, und zwar in deren Mitte, senkrecht steht.**

Dieser Satz ist eine Folge der zwei vorhergehenden: denn diesen gemäß sind die Projectionen der Kugelkreise selbst Kreise und die Projection einer Sehne jener ist eine Sehne dieser; die Projection der gemeinschaftlichen Sehne jener Kreise ist daher auch eine gemeinschaftliche Sehne der Projectionen; die Mittelpunkte der letzteren liegen daher nach Plan. II., 13, Zus. 1 auf einer geraden Linie, welche die letztgenannte Sehne halbirt und darauf senkrecht steht.

5. **Die Projectionen zweier beliebigen Kugelkreise schneiden sich unter demselben Winkel, wie diese Kreise selbst.**

Beweis. A sei ein Punkt der Kugelfläche, in welchem zwei Kreise derselben (größte oder kleine) sich schneiden; AB und AD seien zwei Tangenten dieser Kreise, beide bis zur Tafel gezogen, welche von ihnen in B und D getroffen wird. Der Winkel BAD ist also derjenige, unter welchem die durch A gehenden zwei Kugelkreise sich schneiden. Die durch OC (O Ort des Auges) und CA gelegte Ebene OCA schneide die Tafel nach CK, und diese Durchschnittslinie begegne der BD in K. Zieht man KA und KO, so ist KA der Durchschnitt der Ebene $OCAK$ mit der Ebene BAD. OA treffe CK und also auch die Tafel in E. Zieht man EB und ED, so sind diese Linien die Projectionen der Tangenten AB und AD und der Winkel BED ist die Projection des Winkels BAD. Es ist zu beweisen, daß diese Winkel BED und BAD gleich groß sind.

Fig. 185.



Da OC auf der Ebene BCD (der Tafel) und CA auf der Ebene BAD senkrecht steht, so sind die Ebenen BAD und BCD beide senkrecht auf dieser Ebene $OCAK$; daher ist auch ihr Durchschnitt BD senkrecht auf dieser Ebene, und also BD senkrecht auf KO, KC und KA. Es ist aber dabei $KE = KA$. Denn da $OC = CA$, so ist $\sphericalangle\ COA = CAO$; aber $COA + OEC = R$, da $OC \perp CK$, und $CAO + EAK = R$, da $CA \perp AK$; folglich ist auch $\sphericalangle\ OEC = EAK$, oder $KEA = KAE$, und mithin $KA = KE$. Hieraus nun und da KA und KE beide senkrecht auf DB stehen, folgt die Congruenz der Dreiecke EBD und ABD, aus dieser die Gleichheit der Winkel BED und BAD *).

Noch einfacher ist folgender Beweis: Durch O sei eine mit der Tafel parallele, die Kugel also berührende, Ebene gelegt und diese werde durch die Verlängerung von AB in B', durch die von AD in D' getroffen. Zieht man OB' und OD', so ist (I., 39) $OB' \parallel EB$, $OD' \parallel ED$. Nun schneiden aber die

---

*) Anm. Man vergleiche mit diesem Beweise den unnütz weitschweifigen und schwierigen Beweis in Klügel's Math. Wörterbuch, Band IV., S. 475—477.

beiden Ebenen OAB' und OAD' die Kugel in Kreisen, welche sich (II., 20 b) unter gleichen Winkeln durchschneiden und diese Winkel sind die ihrer Tangenten an O und A, daher ist $\sphericalangle B'OD'$ und also auch $\sphericalangle BED = B'AD'$ oder BAD. Winkel BED ist aber die Projection von BAD.

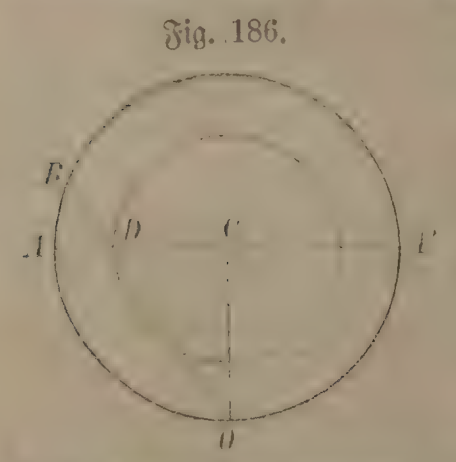
Zusatz. Aus der eben bewiesenen Eigenschaft der stereographischen Projection folgt, daß die Projectionen der kleinsten Theile der Kugelfläche ihrem Urbilde auf der Kugel ähnlich sind. Auf Landkarten, welche nach der stereographischen Projectionsart gezeichnet sind, haben also die Grade der Länge zu denen der Breite überall nahe das richtige Verhältniß, d. h. nahe dasselbe, wie auf der Kugel. Diese Eigenschaft, verbunden mit der, daß die Projectionen der Kugelkreise wieder Kreise sind, macht die stereographische Entwerfungsart zu Land- und Himmelskarten besonders empfehlungswerth.

B. Aufgaben.

6. Die Projection eines kleinen, der Tafel parallelen Kugelkreises zu finden, wenn sein sphärischer Abstand von dem ihm parallelen größten Kreise (hier dem Grundkreise) gegeben ist.

Nach (2) dieses Anhanges ist die Projection ein dem Grundkreise concentrischer Kreis. Hiernach ziehe man einen beliebigen Radius CA des letzteren und den darauf senkrechten CO, nehme von A an den Bogen AB gleich dem gegebenen sphärischen Abstande des zu projicirenden Kreises vom Grundkreise und verbinde B mit O. Schneidet nun BO den Radius CA in D, so ist der um C mit CD beschriebene Kreis die verlangte Projection. — Den Grund dieser Construction wird man gleich einsehen, wenn man sich den auf der Tafel senkrechten und diese nach ACA' schneidenden größten Kugelkreis vorstellt, in diesem vom Auge aus eine gerade Linie nach dem Punkte zieht, worin dieser Kreis den zu projicirenden Kreis trifft, und hierauf den genannten, durchs Auge gehenden Kreis, um AA' dreht, bis er in die Tafel zu liegen kommt oder mit dem Grundkreise zusammenfällt. Das Auge kommt dabei in O, jener Punkt in B zu liegen. D behält seine Lage auf CA.

Fig. 186.



7. Die Projection eines größten Kreises zu finden, dessen Durchschnitt mit dem Grundkreise gegeben ist, und der mit diesem einen gegebenen **Winkel macht.**

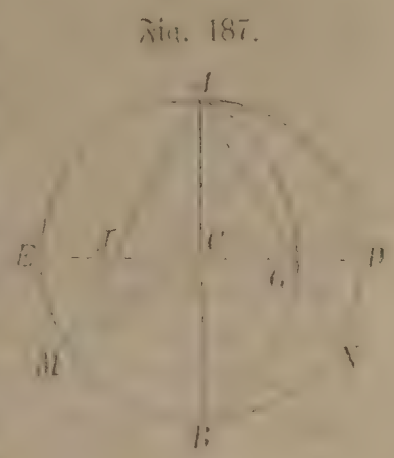


Fig. 187.

Auflösung. Der gegebene Durchschnitt ist ein Durchmesser des Grundkreises; er sei AB. Nach (4) muß der Mittelpunkt der Projection, die ein Kreis ist, in dem auf AB senkrechten Durchmesser DE liegen. Nach (5) muß dieser Kreis den Grundkreis unter dem gegebenen Winkel φ schneiden; daher müssen auch die an A oder B endigenden Halbmesser beider Kreise einen Winkel $= \varphi$ mit einander machen. Man nehme deshalb von B an auf dem Grundkreise einen Bogen $BM = 2\,\varphi$, ziehe MA und beschreibe um den Punkt J, in welchem MA den Durchmesser DE schneidet, mit JA als Radius einen Kreis: er wird die verlangte Projection sein; denn es ist $\sphericalangle JAC = \frac{1}{2}\,MCB = \varphi$.

Bem. Dieser Kreis treffe DE in G, und AG treffe den Grundkreis in N, so wird der Bogen $DN = \frac{1}{2}\,BM = \varphi$ sein. Hiernach läßt sich G unabhängig von J finden, und einer dieser Punkte kann zur Controle des anderen dienen.

8. Die Projection eines Kugelkreises zu finden, der auf der Tafel senkrecht steht und diese nach einer gegebenen Linie durchschneidet.

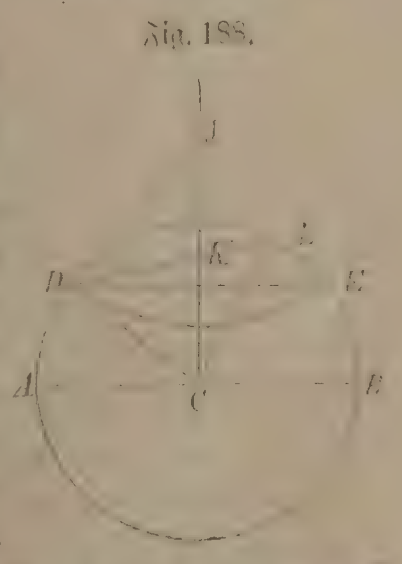


Fig. 188.

Ist der Kugelkreis ein größter, so geht er durch den Ort des Auges; seine Projection ist also nach (1) eine gerade Linie, und diese ist der gegebene Durchschnitt selbst.

Ist der Kugelkreis ein kleiner, so sei DE der gegebene Durchschnitt desselben mit dem Grundkreise AB. Seine Projection ist nach (3) ein Kreis, der durch D und E geht, und dessen Mittelpunkt nach (4) in dem aus C auf DE gefällten Perpendikel liegen muß. Derselbe Kreis muß aber nach (5) den Grundkreis, auf welchem der zu projicirende, der Aufgabe gemäß, senkrecht stehen soll, rechtwinkelig durchschneiden. Zieht man daher an D oder E eine Tangente des Grundkreises, so ist der Punkt J, in welchem

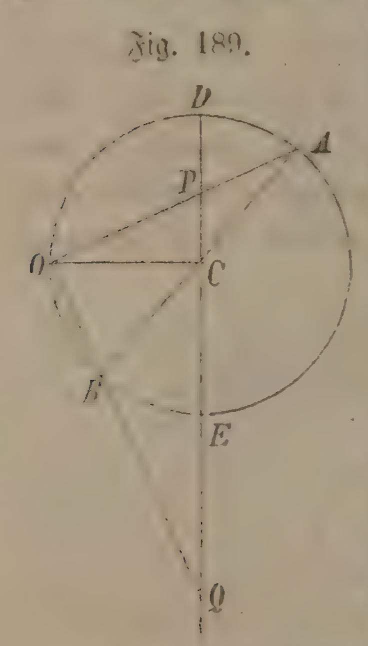
diese Tangente das aus C auf DE gefällte Perpendikel trifft, der Mittelpunkt der Projection; JD und JE sind Halbmesser derselben.

Den Mittelpunkt J kann man auch dadurch finden, daß man vorher die Mitte K von CJ bestimmt. Zieht man nämlich durch diese Mitte die Sehne DKL des Grundkreises, so wird der Bogen DL derselben doppelt so groß als der Bogen AD sein, wenn Durchmesser $AB \parallel DE$ ist. Denn es ist $\sphericalangle\, DCL = 2\, JDL$; aber $\sphericalangle\, JDL$ oder $JDK = DJK = ACD$, daher $\sphericalangle\, DCL = 2\, ACD$, oder Bogen $DL = 2\, AD$. Hierdurch wird auf leichte Weise K bestimmt, und durch K das Centrum J des Bogens DE.

9. **Die Projection eines durch das Auge gehenden größten Kugelkreises sei gegeben. Man soll die eines Durchmessers dieses Kreises suchen, der gegen die Tafel eine bestimmte Neigung hat.**

Da der Kugelkreis durch das Auge geht, so ist (1) seine Projection eine gerade Linie, der Durchschnitt seiner Ebene mit dem Grundkreise. Diese sei DE; Radius CO des Grundkreises senkrecht auf DE. Die Projection des zu entwerfenden Durchmessers fällt der Richtung nach in DE und es sind nur die Projectionen seiner Endpunkte zu bestimmen. Zu diesem Zwecke ziehe man den Durchmesser AB des Grundkreises, so daß der Winkel ACD oder BCE, den er mit DE macht, dem gegebenen Neigungswinkel des zu projicirenden Durchmessers gegen die Tafel gleich ist und verbinde A und B mit O; dann sind die Punkte P und Q, in welchen DE von den Verbindungslinien OA und OB geschnitten wird, die Projectionen der Endpunkte des Durchmessers, PQ also die des Durchmessers selbst. — Der Grund dieser Construction wird sogleich klar, wenn man sich den in Rede stehenden Kugelkreis, der auf dem Grundkreise senkrecht steht und ihn nach DE schneidet, um DE gedreht denkt, bis er mit dem Grundkreise OAB zusammenfällt. Das Auge kommt dabei in den Punkt O; P und Q bleiben unverändert.

Fig. 189.



Zus. Der Winkel POQ ist ein rechter; hieraus erhellt, wie aus der Projection P eines Punktes der Kugel die Projection Q des Gegenpunktes gefunden wird.

10. **Aufgabe.** **Einen größten Kugelkreis zu projiciren, wenn die Projection des auf ihm senkrechten Durchmessers (seiner Achse) gegeben ist.**

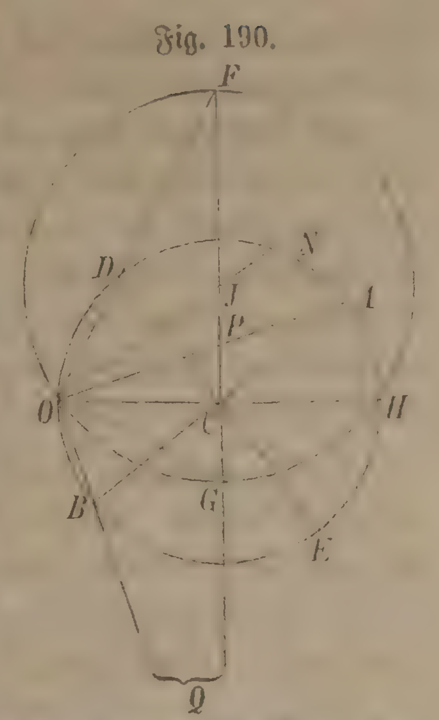


Fig. 190.

Auflösung. PQ sei die gegebene Projection des Durchmessers. Ist $CO \perp PQ$, so muß $\sphericalangle\, POQ$ ein Rechter sein. OP treffe verlängert den Grundkreis in A, die OQ in B. ACB ist ein Durchmesser; der Winkel, den dieser mit PQ macht, ist nach (9) dem Neigungswinkel des in PQ projicirten Durchmessers gegen die Tafel gleich. Zieht man nun den auf AB senkrechten Durchmesser DE und verbindet D und E mit O, so liegen die Punkte F und G, in welchen die verlängerte PQ von OD und OE geschnitten wird, mit O und H in einem Kreise, dessen Durchmesser FG ist. Dieser ist die verlangte Projection.

Den Mittelpunkt J dieses Kreises kann man finden, ohne F und G zu kennen. Da $JF = JO$, so ist $\sphericalangle\, JOF = JFO = COG = CEO$, daher $OJ \perp DE$ und $ON \parallel AB$, Bogen $AN = OB = AH$. Hiernach ist zuerst N, dann J leicht zu construiren. Zu derselben Construction führt die Anwendung von Aufgabe 7, indem OCB der Winkel ist, welchen der zu projicirende Kreis mit der Tafel macht.

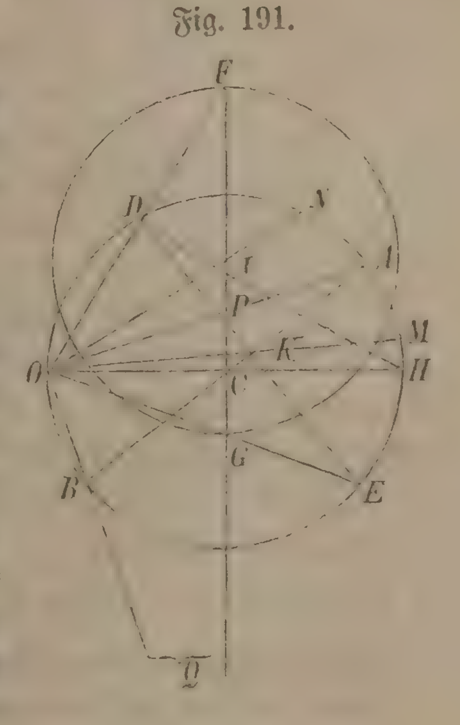


Fig. 191.

11. Aufgabe. Einen kleinen Kugelkreis zu projiciren, wenn die Projection des darauf senkrechten Durchmessers der Kugel und der sphärische Radius des Kreises (II., 12) gegeben sind.

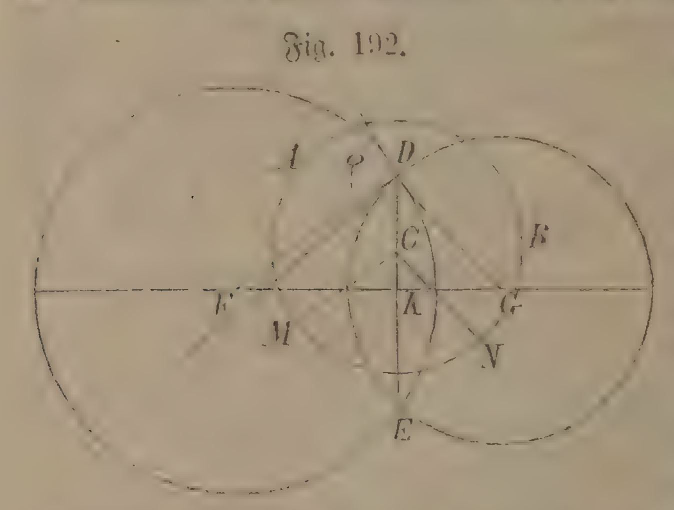
Die Auflösung ist, so weit sie die Bestimmung der Punkte F und G betrifft, ganz die vorige in (10), nur hat man statt des auf AB senkrechten Durchmessers DE die ebenfalls darauf senkrechte Sehne DE so zu ziehen, daß die Bogen AD und AE dem gegebenen sphärischen Radius des zu projicirenden Kreises gleich werden. Was die Bestimmung von J, Mitte der FG und der verlangten Projection, betrifft, so kann

dieselbe auch hier, unabhängig von F und G, auf folgende Weise geschehen. Die Sehne DE treffe AB in K und OK treffe verlängert den Grundkreis in M, OJ denselben in N. Da $\sphericalangle\, OFG = OHD = OED$, so ist $\triangle\, FOG \sim EOD$. Nun ist FG in J, DE in K halbirt, daher ist auch $\sphericalangle\, FOJ = EOK$, also Bogen $DN = EM$; aber Bogen $DA = AE$, folglich auch Bogen $AN = AM$. Um also den Punkt J zu finden, ziehe man OKM, nehme Bogen $AN = AM$ und ziehe NO. Diese letztere Linie schneidet PQ im Mittelpunkte J des Kreises FG.

12. **Aufgabe. Die Projection eines von zwei Kugelkreisen, die ihres Durchschnittes oder ihrer gemeinschaftlichen Sehne und der Winkel φ, unter welchem beide sich schneiden, sind gegeben; die Projection des anderen Kreises zu finden.**

Auflösung. AB sei der Grundkreis und C dessen Mittelpunkt, DE die Projection der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kugelkreise; Punkt F (in der auf DE in deren Mitte K errichteten Senkrechten) der gegebene Mittelpunkt der Projection eines der beiden Kreise, G (in derselben Senkrechten) der zu bestimmende Mittelpunkt der Projection des andern. Da diese Projectionen nach (5) sich unter demselben Winkel φ schneiden, wie die Kreise selbst, so

Fig. 192.

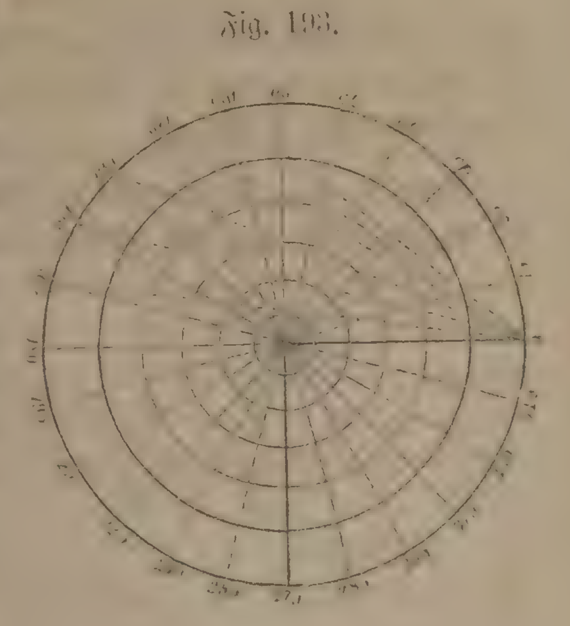


müssen die Tangenten beider am Punkte D und daher auch die Radien FD und GD einen Winkel $= \varphi$ mit einander bilden. Man erhält also den Punkt G, wenn man D mit F verbindet, Radius $CM \parallel DF$ zieht, auf dem Grundkreise Bogen $MN = \varphi$ nimmt, N mit C verbindet und $DG \parallel CN$ zieht. Der Punkt G, in welchem DG die durch F und die Mitte K von DE gezogene Gerade trifft, ist der Mittelpunkt der verlangten Projection; GD und GE sind Radien derselben.

Die Anwendung des Bisherigen auf die stereographische Entwerfung der Erd- und Himmelskugel, oder vielmehr auf die Entwerfung des von den Meridianen und Parallelkreisen gebildeten Netzes auf deren Oberfläche hat keine Schwierigkeit und ist eine fast unmittelbare. Alles hängt dabei von dem Orte des Auges auf der Kugel ab, und da dieser Ort eine dreifache Hauptverschiedenheit darbietet, je nachdem er 1. in einem der Pole, 2. im Aequator, 3. zwischen Pol und Aequator angenommen wird, so unterscheidet man auch eine dreifache stereographische Projection, die Polar-, die Aequatorial- und die Horizontalprojection.

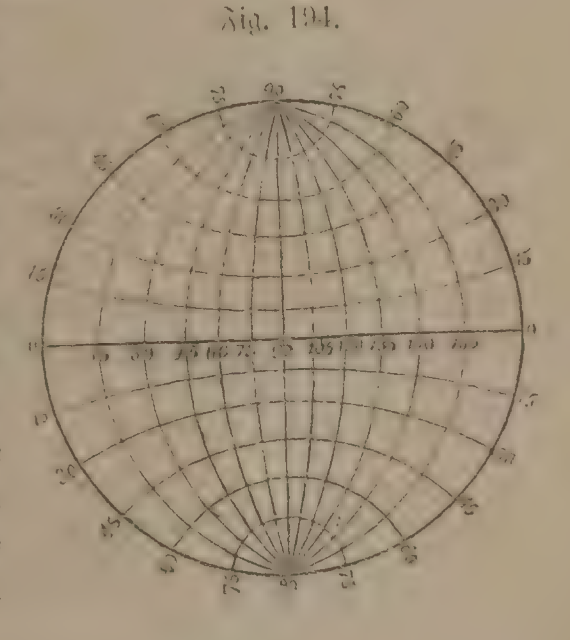
I. **Polarprojection** ist diejenige, bei welcher das Auge in einem der beiden Pole steht, der Aequator also Grundkreis, die Ebene desselben Projectionsebene ist. Die Projection der beiden Pole fällt in die Mitte des Grundkreises; die Meridiane werden nach (1) als gerade Linien, die Parallelkreise nach (6) als Kreise projicirt, die mit dem Grundkreise concentrisch sind. Nebenstehende Fig. 193 veranschaulicht diese Projection für ein Netz von 15 zu 15 Graden mit den nöthigen Hülfslinien.

Fig. 193.



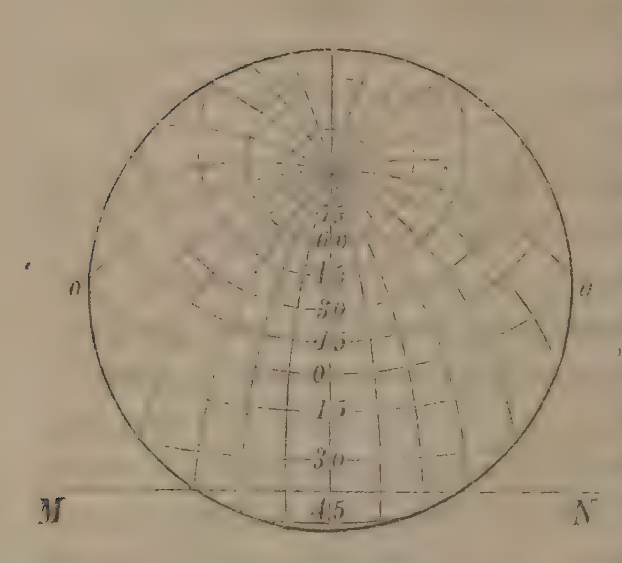
II. **Aequatorialprojection.** Bei dieser steht das Auge in einem Punkte des Aequators; der 90° davon entfernte Meridian ist Grundkreis. Die Pole fallen daher in den Umfang des letzteren und der Aequator wird in der Projection ein Durchmesser desselben. Die Meridiane werden nach (7), die Parallelkreise nach (8) projicirt. Nebenstehende Fig. 194 zeigt diese Projection für ein Netz von 15 zu 15 Graden. Zum Grundkreis ist der erste Meridian genommen. Wollte man in

Fig. 194.



dieses Netz, als das der Himmelskugel, die Ekliptik hineinzeichnen, welche mit dem Aequator einen Winkel von nahe $23\frac{1}{2}$ Grad macht, so hätte dieses nach (7) keine Schwierigkeit.

Fig. 195.



III. Horizontalprojection wird diejenige genannt, bei welcher der Ort des Auges irgendwo zwischen Pol und Aequator angenommen ist. Die sphärische Entfernung des Auges vom Aequator auf der Kugel ist dessen geographische Breite oder Polhöhe. Sie ist dem Neigungswinkel der Achse des Aequators gegen die Bildfläche oder Tafel gleich. Ist dieser gegeben, so hat man die Pole nach (9) zu projiciren; nur einer derselben fällt in den Grundkreis. Die Meridiane sind dann nach (12), die Parallelkreise nach (11), unter diesen der Aequator insbesondere nach (10) zu entwerfen. Obenstehende Fig. 195 zeigt diese Projection für eine Polhöhe oder geographische Breite von 40° und ein Netz von 15 zu 15 Graden. *MN* ist die gerade Linie, in der nach (4) die Mittelpunkte der Projectionen sämmtlicher Meridiane liegen.

Der dritte Theil dieses Lehrbuches enthält im XI. Capitel 16–21 die zur stereographischen Projection gehörigen Berechnungen.

Anhang VI.

Zum 2. Abschnitt des IV. Capitels,

die strengeren Beweise der darin aufgeführten Sätze enthaltend.

Vorbemerkung. Die Beweise, welche Euklid und Archimed von den in ihren Werken aufgestellten Lehrsätzen über den Inhalt des Kreises, der Kugel, des Kegels und Cylinders, so wie deren Oberfläche geben *), lassen zwar hinsichtlich der logischen Strenge wenig zu wünschen übrig, sind jedoch durch die dabei angewandte (sogenannte Exhaustions-) Methode so weitläufig, daß, wie schon Klügel richtig bemerkt, sie für ungeduldige Leser nicht gemacht sind, und deshalb auch in die neueren Lehrbücher der Geometrie, namentlich in die für den Unterricht bestimmten, kaum Eingang gefunden haben. Dagegen hat man in diesen andere Wege versucht, um jene Beweise der alten Geometer durch kürzere Schlußfolgen zu ersetzen. Diese reduciren sich im Wesentlichen auf drei; entweder nämlich:

1. erlaubt man sich geradezu die krumme Linie als eine aus unzählig vielen, aber unendlich kleinen, geraden Linien zusammengesetzte Linie (den Kreis also als ein Polygon), zu betrachten; ferner die gekrümmte Fläche als eine aus unzählig vielen, unendlich kleinen, Ebenen zusammengesetzte Fläche anzusehen und, dieser Ansicht gemäß, auf die gekrümmten Größenformen, den Kreis, Cylinder, Kegel, die Kugel 2c., ohne Weiteres alle den Flächen- und Körper-Inhalt betreffenden Sätze anzuwenden, welche von den entsprechenden eckigen Formen, dem Polygon, Prisma, der Pyramide, dem Polyeder, erwiesen sind. Dieser Weg ist allerdings der kürzeste, um zu richtigen Resultaten zu gelangen; er ist in schwierigeren Theilen der Curvenlehre kaum zu entbehren, der für den Unterricht bequemste, und daher auch der im vorliegenden Theile des Lehrbuches Cap. IV. und VI. befolgte. Rücksichtlich

*) S. Euklid's Elemente XII. 2, 10, 11, 12, 18; Archimedes' von Syrakus zwei Bücher von der Kugel und dem Cylinder.

der logischen Strenge kann derselbe jedoch im Vergleiche zu den übrigen Beweisen der Elementar-Geometrie, deren Schlüsse überall auf Begriffen von einem dem Raum und der Zahl nach Endlichen und Begrenzten beruhen, nur unvollständig befriedigen.

2. Oder man betrachtet die genannten krummlinigen und krummflächigen Figuren als Grenzen, welchen ein- und umgeschriebene eckige Figuren sich bis auf beliebig klein zu machende Unterschiede nähern können, und geht dabei von einem allgemeinen, aber immerhin zu beweisenden, Satze über Grenzen aus, wie etwa: „Haben zwei veränderliche Größen auf jeder Stufe ihrer gesetzmäßigen Veränderung stets einerlei Verhältniß, (den Fall der Gleichheit eingeschlossen), so stehen ihre Grenzen in demselben Verhältnisse." Die genaue Anwendung eines solchen Satzes erfordert aber in jedem besonderen Falle die Nachweisung, daß die zu bestimmende krummlinige oder krummflächige Figur wirklich die Grenze der sich ihr nähernden, sowohl ein- als umgeschriebenen, eckigen Figuren sei, d. h. daß der Unterschied beider wirklich kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne. Geschieht dieses in Strenge, so verliert dieser Weg an Kürze und fällt dem den älteren Beweisen gemachten Vorwurfe anheim; oder:

3. man wendet die indirecte Beweisform an und stützt sich auf den in Euklid's Elementen XII., 16 als Aufgabe behandelten Lehrsatz in Plan. VI., 20, um, wie Legendre dieses zuerst durchgeführt hat, jene Beweise auf eine gleichmäßige Art, ohne die Begriffe von unendlich kleiner Ausdehnung und unendlich großer Zahl und von Grenzen zu führen. Legendre begeht jedoch hierbei den Fehler, daß er voraussetzt: es gebe Kegel, Cylinder, Kugeln, so wie Kreise, Kegel- und Cylindermäntel, Kugelflächen von jeder gegebenen Größe, oder, was auf dasselbe hinausläuft, es lasse sich jedes Parallelepipedum in die Form eines jeden der drei genannten runden Körper, jedes Rechteck in die Form einer der genannten Flächen bringen. Da diese Voraussetzung ihrem Inhalte nach erst eine Folge der zu beweisenden Sätze ist, so kann sie ihnen nicht zu Grunde gelegt werden, ist daher unstatthaft. Außerdem fußt Legendre in seinen Beweisen auf einem allgemeinen Satze über convexe Flächen, die sich umschließen, dessen Beweis jedoch mit Recht als nicht stichhaltig getadelt wird.

Wir geben nun in diesem und dem folgenden Anhange die Legendre'schen Beweise über Cylinder, Kegel und Kugel, jedoch in verbesserter Gestalt, so daß die gerügten Mängel wegfallen, und glauben hiermit den Freunden

strenger Methode einen willkommenen Beitrag zur Vervollkommnung des Systems der Elementar-Geometrie zu liefern*).

A. Cylindermantel.

Lehrsatz. Der Mantel eines senkrechten Cylinders ist größer als die Seitenfläche eines eingeschriebenen Prisma, kleiner als die eines umgeschriebenen.

Beweis. Die Seitenfläche eines senkrechten Prisma ist dem Rechtecke aus dem Umfange seiner Grundfläche und der Höhe des Prisma gleich. Geht man nun

1. von einem gegebenen, dem Cylinder eingeschriebenen Prisma aus und verdoppelt, durch Einschreibung neuer Prismen, wiederholt die Seitenzahl derselben, so ist klar, daß mit der Anzahl dieser Seiten auch der Umfang der Grundfläche, folglich auch die Seitenfläche zunimmt; geht man dagegen

2. von einem gegebenen, dem Cylinder umgeschriebenen, Prisma aus und verdoppelt wiederholt, durch Umschreibung neuer, die Seitenzahl derselben, so nimmt der Umfang ihrer Grundfläche ab, daher auch die Seitenfläche der Prismen.

Da nun die Möglichkeit der Vervielfachung der Seiten, in dem einen sowohl als in dem andern Falle, keine Grenze hat, bei einer jeden aber die Zahl der geraden Linien, in welchen Cylindermantel und prismatische Fläche zusammenfallen, oder welche beiden gemeinschaftlich werden, sich vervielfacht, so daß es keine gerade Linie in jenem gibt, die nicht auch der letzteren angehören könnte, so muß zugegeben werden, daß, was von den Seitenflächen der ein- und umgeschriebenen Prismen in steigendem Maße gilt, je mehr Seiten sie haben, dieses um so mehr vom Cylindermantel gelte, daß also dieser Mantel größer als die Seitenfläche jedes eingeschriebenen Prisma, kleiner als die jedes umgeschriebenen sei.

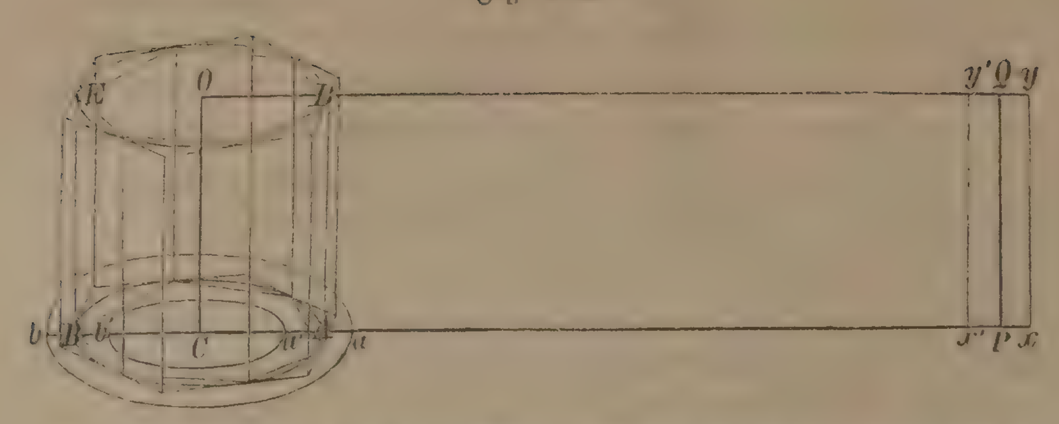
Beweis des Satzes IV., 36.

„Der Mantel eines senkrechten Cylinders ist dem Rechtecke aus der Höhe oder Achse des Cylinders und der rectificirten Peripherie seiner Grundfläche gleich."

---

*) Anmerkung. Die hier mitgetheilten Beweise wurden schon im Jahre 1839 in einem Schulprogramme durch Einen von uns veröffentlicht.

Fig. 196.



$ABED$ sei ein senkrechter Cylinder, dessen Achse oder Höhe CO ist; $CP \perp CO$ sei die rectificirte Peripherie der Grundfläche AB. Bildet man nun aus CO und CP ein Rechteck $CPQO$, so wird der Mantel des Cylinders diesem Rechtecke an Inhalt gleich sein. Denn gesetzt, er wäre es nicht, so müßte er, da es Rechtecke von jeder Größe gibt, entweder einem größeren oder einem kleineren Rechtecke, als $CPQO$ ist, gleich sein. Er sei 1. einem größeren Rechtecke, etwa dem aus CO und $Cx > CP$ gebildeten Rechtecke $CxyO$ gleich. Nimmt man nun zu CP, Cx und CA die vierte Proportionale Ca und beschreibt mit dieser um C einen Kreis ab, so ist dessen Umfang $= Cx$; denn dieser Umfang verhält sich (Plan. VI., 21) zum Umfange der Grundfläche wie $Ca : CA$, also auch wie $Cx : CP$ und da der letztere $= CP$, so ist der erstere $= Cx$. — So wenig nun auch der Kreis ab von dem Kreise AB verschieden sein mag, immerhin wird es (Plan. VI., 20) möglich sein, dem letzteren ein Polygon umzuschreiben, welches ganz im ersteren enthalten ist. Dieses sei geschehen und auf dem Polygone ein senkrechtes Prisma errichtet, von gleicher Höhe mit dem Cylinder. Die Seitenfläche dieses Prisma ist dem Rechtecke aus CO und dem Umfange seiner Grundfläche gleich; dieser Umfang ist aber (Plan. VI., 19) kleiner als der des Kreises ab, welcher $= Cx$ ist; folglich ist jene Seitenfläche kleiner als das Rechteck aus CO und Cx oder $CxyO$. Letzteres ist aber der Annahme gemäß so groß wie der Mantel des Cylinders: also müßte, wäre diese Annahme richtig, die Seitenfläche des Prisma kleiner als der Cylindermantel sein. Nach dem vorigen Satze ist aber im Gegentheil, da jenes ein umgeschriebenes ist, der Cylindermantel kleiner als die Seitenfläche des Prisma. Dieser Widerspruch zeigt, daß der Cylindermantel keinem größeren Rechtecke als $OCPQ$ gleich sein kann.

Er sei 2. einem kleineren, etwa dem aus CO und $Cx' < CP$ gebildeten Rechtecke $Cx'y'O$ gleich. Nimmt man nunmehr zu CP, Cx' und CA die

vierte Proportionale Ca, und beschreibt wieder mit dieser einen Kreis $a'b'$ um C, so wird dessen Umfang $= Cx'$ sein. So wenig dieser Kreis von dem Kreise AB verschieden sein mag, es läßt sich (Plan. VI., 20) dem letzteren ein Polygon einschreiben, welches den Kreis $a'b'$ ganz umschließt. Dieses sei geschehen und auf dem Polygone ein senkrechtes Prisma errichtet von der Höhe CO. Da der Umfang des Polygones größer als der des Kreises $a'b'$ ist, welcher $= Ax'$, so ist auch die Seitenfläche des Prisma größer als das aus CO und Cx' gebildete Rechteck $OCx'y'$. Der Annahme gemäß ist dieses dem Cylindermantel gleich; also müßte, wäre diese Annahme richtig, die genannte Seitenfläche auch größer als der Cylindermantel sein; dem vorigen Satze nach ist aber im Gegentheile dieser letztere größer als jene; folglich kann die zweite Annahme auch nicht bestehen d. h. der Cylindermantel kann keinem kleineren Rechtecke als $COQP$ gleich sein.

Demnach kann der Mantel des Cylinders nur dem aus der Höhe und dem Umfange der Grundfläche gebildeten Rechtecke gleich sein.

B. Kegelmantel.

Lehrsatz. Der Mantel eines senkrechten Kegels ist größer als die Seitenfläche jeder dem Kegel eingeschriebenen Pyramide, kleiner als die jeder umgeschriebenen.

Beweis. Die Seitenfläche einer dem Kegel eingeschriebenen Pyramide besteht aus lauter gleichschenkeligen Dreiecken und ist daher der halben Summe aller Rechtecke gleich, die man aus den einzelnen Grundlinien dieser Dreiecke und der jedesmal zugehörigen Höhe bilden kann. Die Seitenfläche einer dem Kegel umgeschriebenen Pyramide besteht aus Dreiecken, welche alle gleich große Höhe, die Länge der Kegelseite nämlich, haben; diese Fläche ist daher dem halben Rechtecke aus der Kegelseite und dem Umfange der Grundfläche der Pyramide gleich. Geht man nun

1. von einer gegebenen dem Kegel eingeschriebenen Pyramide aus und verdoppelt, durch Einschreibung neuer Pyramiden, wiederholt die Seitenzahl derselben, so ist klar, daß mit der Anzahl der Seiten nicht allein der Umfang der Grundfläche in allen seinen Theilen, sondern auch der senkrechte Abstand der Spitze der Pyramide von den Seiten der Grundfläche überall zunimmt, daß also aus doppeltem Grunde auch die Seitenfläche der Pyramide mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl größer wird; geht man dagegen

2. von einer gegebenen, dem Kegel umgeschriebenen Pyramide aus, und verdoppelt, durch Umschreibung neuer Pyramiden, die Seitenzahl derselben, so nimmt der Umfang ihrer Grundfläche ab, daher auch die Seitenfläche dieser Pyramide.

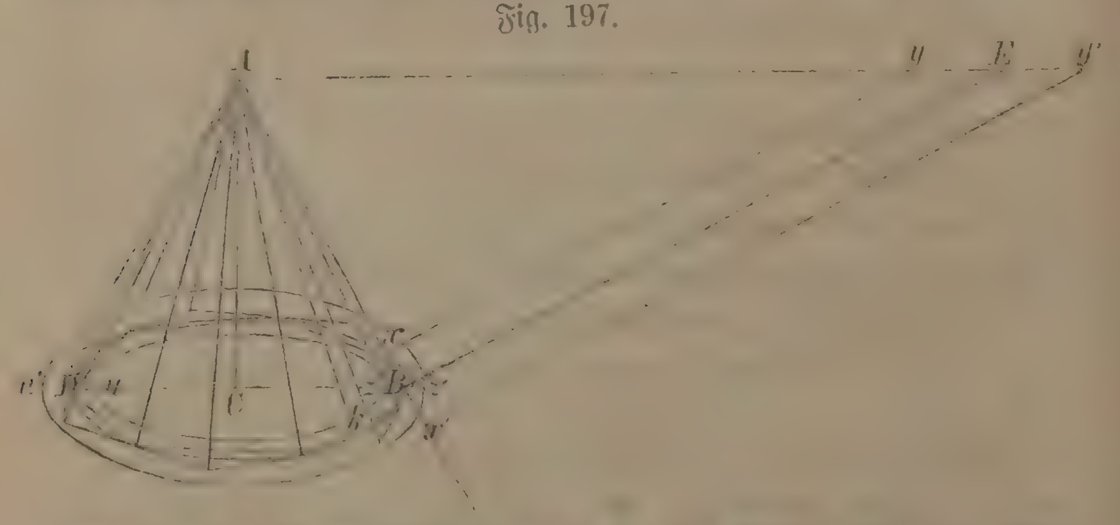
In dem einen Falle sowohl wie in dem anderen nimmt die Seitenfläche der Pyramiden immer mehr Kegelseiten in sich auf, und es ist keine der letzteren, welche nicht sowohl Kante der eingeschriebenen, als Berührungslinie der umgeschriebenen Pyramiden werden könnte. Man muß daher annehmen, daß, was von der Größe der Seitenfläche dieser Pyramiden in steigendem Maße bei Vervielfachung ihrer Seiten gilt, um so mehr vom Kegelmantel gelte, daß also dieser Mantel größer als die Seitenfläche jeder eingeschriebenen, kleiner aber als die jeder umgeschriebenen Pyramide sei.

Beweis des Satzes IV., 39.

„Der Mantel eines senkrechten (geraden) Kegels ist an Inhalt einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Kegels und dessen Höhe seiner Seitenlänge gleich ist."

ABD sei ein gerader Kegel, *AC* dessen Achse, $AB = AD$ seine Seitenlänge; errichtet man nun auf *AB* in *B* die Senkrechte *BE*, macht diese dem Umfange der Grundfläche *BD* des Kegels gleich und zieht *AE*, so wird das rechtwin-

Fig. 197.



kelige Dreieck *ABE* an Inhalt so groß wie der Kegelmantel sein. Denn gesetzt, dieses wäre nicht, so müßte der Mantel entweder einem kleineren oder einem größeren Dreiecke gleich sein, indem es Dreiecke von jeder möglichen Größe gibt. Angenommen

1) Der Kegelmantel wäre einem kleineren Dreiecke gleich. Wie dieses auch beschaffen, man kann es (Plan. V., 90) ohne Aenderung des Inhaltes in ein dem Dreiecke ABE ähnliches Dreieck Axy verwandeln, wodurch $Ax < AB$ ausfällt. Zieht man nun von x aus xz senkrecht auf CB, und beschreibt um C mit Cz einen Kreis zu, so verhält sich sein Umfang zu dem der Kegel-Grundfläche BD, wie $Cz : CB$, folglich auch wie $Ax : AB$ und endlich wie $xy : BE$. Da nun der Umfang $BD = BE$, so ist der Umfang $zu = xy$. So wenig nun auch der Kreis zu von dem Kreise BD verschieden sein möge, es ist möglich (Plan. IV., 20) dem letzteren ein reguläres Polygon einzuschreiben, welches den Kreis zu ganz in sich enthält. Dieses sei geschehen und über dem Polygone sei eine Pyramide errichtet, deren Spitze A ist. Der Abstand dieser Spitze von den Seiten der Grundfläche der Pyramide sei Ak. Da die Summe der Seitenflächen dieser Pyramide einem Dreiecke gleich ist, dessen Grundlinie dem Umfange ihrer Basis gleichkommt und dessen Höhe Ak, jener Umfang aber größer als der Kreisumfang zu oder die eben so lange xy ist, dazu $Ak > Az > Ax$, so muß die Summe der Seitenflächen der Pyramide größer als das aus Ax und xy als Katheten gebildete Dreieck Axy sein. Der Annahme gemäß soll aber dieses Dreieck so groß wie der Kegelmantel sein; folglich müßte, wäre diese Annahme richtig, dieser Mantel kleiner als die Summe der Seitenflächen der ihm eingeschriebenen Pyramide sein. Dem vorangeschickten Lehrsatze gemäß ist er aber größer; daher kann der Mantel nicht dem $\triangle Axy$, überhaupt keinem kleineren Dreiecke als ABE, gleich sein.

2) Der Kegelmantel sei einem größeren Dreiecke, etwa dem Dreiecke $Ax'y' \sim ABE$ gleich. Zieht man wieder $x'z' \perp CB$ und beschreibt mit Cz' einen mit der Grundfläche concentrischen Kreis $z'u'$, so ist der Umfang desselben, aus gleichen Gründen wie vorher, gleich $x'y'$. So wenig derselbe vom Kreisumfange BD verschieden sein möge, es ist möglich, dem letzteren ein Polygon umzuschreiben, welches ganz im Kreise $z'u'$ enthalten ist. Denkt man sich über einem solchen Polygon eine Pyramide errichtet, deren Spitze A ist, so ist die Summe der Seitenflächen dieser Pyramide einem aus AB und der Länge des Polygonumfanges als Katheten gebildeten rechtwinkeligen Dreiecke gleich, sie ist also, da dieser Umfang kleiner als der Kreisumfang $z'u'$ oder als $x'y'$, und $AB < Ax'$, aus doppeltem Grunde kleiner als das Dreieck $Ax'y'$. Der Annahme gemäß ist dieses Dreieck dem Kegelmantel gleich; es müßte also, wäre sie richtig, dieser Mantel größer als die Summe der Seitenflächen der

ihm umgeschriebenen Pyramide sein. Dem vorausgeschickten Lehrsatze zufolge ist er aber kleiner; daher ist auch diese Annahme falsch.

Demnach kann der Kegelmantel nur dem Dreiecke *ABE*, d. i. einem Dreiecke gleich sein, dessen Grundlinie dem Umfange der Basis des Kegels und dessen Höhe seiner Seitenlänge gleichkommt.

C. Kugelfläche.

Lehrsatz. Ist einem Halbkreise oder auch einem Bogen desselben 1) eine aus gleichen Sehnen bestehende Polygonlinie eingeschrieben; 2) eine andere aus gleichen Tangenten bestehende umgeschrieben, und wird die Figur um den sie begrenzenden Durchmesser ganz umgedreht, so ist die vom Halbkreise beschriebene ganze Kugelfläche oder das vom Bogen beschriebene Segment derselben größer als die von der eingezeichneten Polygonlinie beschriebene Fläche, kleiner als die von der umgeschriebenen erzeugte.

Beweis. Nach IV., 44 ist die von der Polygonlinie in dem einen und anderen Falle beschriebene Fläche dem Mantel eines senkrechten Cylinders gleich, dessen Basis ein mit der Apotheme (Abstand des Mittelpunktes von den Seiten des Polygones) beschriebener Kreis und dessen Höhe die Umdrehungsachse ist (die Länge dieser letzteren ist durch die Projection der Polygonlinie auf sie bestimmt, ist diese Projection selbst). Ist nun 1) die Polygonlinie eine eingeschriebene, so nimmt die Grundfläche besagten Cylinders zu, wenn man die Seitenzahl der Linie vermehrt, weil die Apotheme dann zunimmt; die Höhe des Cylinders aber bleibt unverändert; es wird daher auch die von dieser Polygonlinie erzeugte Fläche mit der Seitenzahl größer. Ist dagegen 2) die Polygonlinie eine umgeschriebene, so ist die Basis des Cylinders constant, die Höhe aber nimmt ab, je größer die Seitenzahl der Polygonlinie ist; daher nimmt auch die von dieser beschriebene Fläche ab. Durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl jener Polygonlinien entstehen aber immer mehr Kreise, welche den von diesen Linien beschriebenen Flächen und der Kugelfläche gemeinschaftlich angehören oder die in beiden zugleich liegen. Die Zahl dieser Kreise ist unbeschränkt und es gibt keinen der auf der Kugelfläche beschriebenen, welcher nicht zugleich der ihr eingeschriebenen sowohl als umgeschriebenen Fläche angehören könnte. Da nun bei der gedachten Vermehrung der Seitenzahl beider Polygonlinien die von der

eingeschriebenen Linie beschriebene Fläche beständig zunimmt, die von der anderen beschriebene beständig abnimmt, so muß angenommen werden, daß die zwischenliegende Kugelfläche, resp. das Segment derselben, größer als die erste, kleiner aber als die zweite der in Rede stehenden Flächen sei.

Beweis des Satzes IV., 45.

„Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als ein größter Kreis derselben."

Fig. 198.



Beweis. Der Halbkreis ADB beschreibe durch seine Umdrehung um AB eine Kugel; die Oberfläche derselben wird dem Vierfachen des ganzen Kreises $ADBE$ gleich sein. Denn, wäre sie es nicht, so müßte sie, da es Kreise von jeder möglichen Größe gibt (Planim. IV., 22, 26), dem Vierfachen entweder eines kleineren oder eines größeren Kreises gleich sein. Sie sei

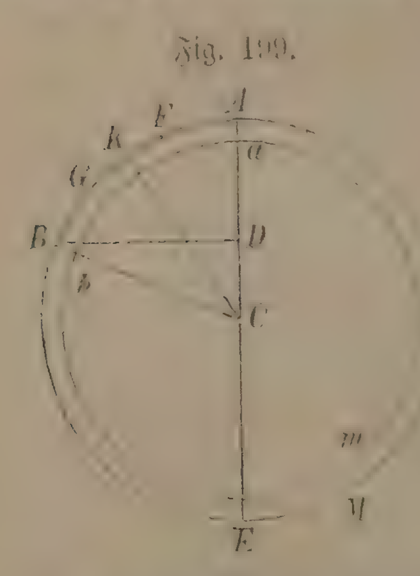
1) dem Vierfachen eines kleineren Kreises $adbe$ gleich. So wenig dieser vom Kreise $ADBE$ verschieden sein mag, man kann immer der Hälfte dieses letzteren eine aus gleichen Sehnen bestehende Polygonlinie $ADGB$ einschreiben, welche die Peripherie abd nicht schneidet. Dieses sei geschehen und Ck sei die Apotheme des Halbpolygones. Nach IV., 44 ist die von $ADGB$ bei der Umdrehung um AB beschriebene Fläche dem Rechtecke aus AB und der Länge eines mit der Apotheme Ck beschriebenen Kreisumfanges gleich; sie ist daher aus doppeltem Grunde größer als das Rechteck aus ab und dem rectificirten Kreisumfange $adbe$ d. i. größer als das 4fache des Kreises $adbe$ (Plan. VI., 26). Der Annahme gemäß ist dieses 4fache der von ADB beschriebenen Kugelfläche gleich; also müßte, wäre diese Annahme richtig, die Oberfläche der Kugel kleiner als die von der Polygonlinie beschriebene Fläche sein. Dem vorausgeschickten Lehrsatze zufolge ist sie aber größer als diese Fläche, da die Polygonlinie dem Halbkreise ADB eingeschrieben ist; also kann die Annahme nicht bestehen. Es sei mithin

2) angenommen, die Kugelfläche sei dem 4fachen eines größeren Kreises, etwa des Kreises $a'd'b'e'$, gleich. Umschreibt man nun dem Halbkreise ADB eine aus gleichen Tangenten bestehende Polygonlinie $pqrst$, die jedoch ganz im Kreise $a'd'b'e'$ enthalten sein muß, so ist nach IV., 44 die von dieser bei der Umdrehung um AB beschriebene Fläche dem Rechtecke aus der Achse pq und dem zur geraden Linie gestreckten Kreisumfange $ADBC$ gleich; sie ist daher aus doppeltem Grunde kleiner als das Rechteck aus $a'b'$ und dem Kreisumfange $a'd'b'e'$, d. i. kleiner als das 4fache des Kreises $a'd'b'e'$ selbst. Der Annahme gemäß ist aber dieses 4fache des Kreises $a'd'b'e'$ der vom Halbkreise ADB beschriebenen Kugelfläche gleich; mithin müßte, wäre diese Annahme richtig, diese Kugelfläche größer als die von der Polygonlinie $pqrst$ beschriebene Fläche sein. Dem vorangegangenen Lehrsatz nach findet aber das Gegentheil Statt; also ist auch die zweite Annahme falsch und es bleibt als richtige Annahme nur die übrig, daß die Oberfläche der Kugel gerade dem Vierfachen ihres größten Kreises gleich sei.

Beweis des Satzes IV., 47.

„**Jede Kugelkappe (auch Kugelzone) ist so groß wie der Mantel eines senkrechten Cylinders, dessen Basis einem größten Kreise der Kugel und dessen Höhe der Kappe gleich kommt.**"

Fig. 199.



Beweis. Der Bogen AB, welcher den Kreissector ACB begrenzt, beschreibt bei der Umdrehung des letzteren um AC eine Kugelkappe, deren Höhe AD ist, wenn $BD \perp AC$. Wäre diese Kappe nicht gleich dem Mantel eines über dem Kreise ABM senkrecht errichteten Cylinders von der Höhe AD, so müßte er, da es Cylindermäntel von jeder Größe gibt, entweder irgend einem kleineren oder einem größeren Cylindermantel gleich sein. Sie sei

1) einem kleineren Mantel, etwa dem eines über dem Kreise abm, der kleiner als ABM, errichteten Cylinders von der Höhe AD gleich. So wenig dieser Kreis von dem Kreise ABM verschieden sein möge, es bleibt immer möglich, dem Bogen AB eine aus gleichen Sehnen bestehende Polygonlinie

$AFGB$ einzuschreiben, welche den Bogen ab nicht schneidet oder trifft. Dies sei geschehen und CK sei ein von C auf eine der Polygonseiten gefälltes Loth. Nach IV., 44, Zus. ist die von der Polygonlinie bei der Umdrehung um AC beschriebene Fläche dem Mantel eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche eine mit der Apotheme CK beschriebener Kreis und dessen Höhe $= AD$ ist. Es ist also, da $CK > Ca$, diese Fläche größer als der Mantel eines über dem Kreise abm errichteten Cylinders von der Höhe AD. Der Annahme gemäß soll aber dieser Cylindermantel der vom Bogen AB beschriebenen Kugelkappe gleich sein; also müßte, wäre diese Annahme richtig, die Kugelkappe kleiner als die ihr eingeschriebene von $AFGB$ erzeugte Fläche sein. Nach obigem Lehrsatze findet aber das Gegentheil Statt, die Kugelkappe ist größer als die Fläche; daher die Annahme zu verwerfen. Wollte man nun ferner

2) annehmen, die vom Bogen AB beschriebene Kugelkappe wäre größer als der Mantel eines über dem Kreise ABM errichteten Cylinders von der Höhe AD, so müßte, da (IV., 45) die ganze Kugeloberfläche dem Mantel eines Cylinders von derselben Basis und der Höhe AE gleich ist, die von dem Bogen EB beschriebene Kappe nothwendig kleiner als der Mantel eines über ABM errichteten Cylinders von der Höhe ED sein, was jedoch dem ersten Theil des Beweises widerspricht. Es ist daher auch die zweite Annahme zu verwerfen.

Aus 1 und 2 folgt gleich die Richtigkeit des Satzes.

Den Beweis des in IV., 54 über die Oberfläche des Ringkörpers ausgesprochenen Satzes wird Jeder, nach dem Muster der obigen Beweise, leicht selbst auszuführen im Stande sein.

Anhang VII.

zum 1. und 2. Abschnitte des VI. Capitels.

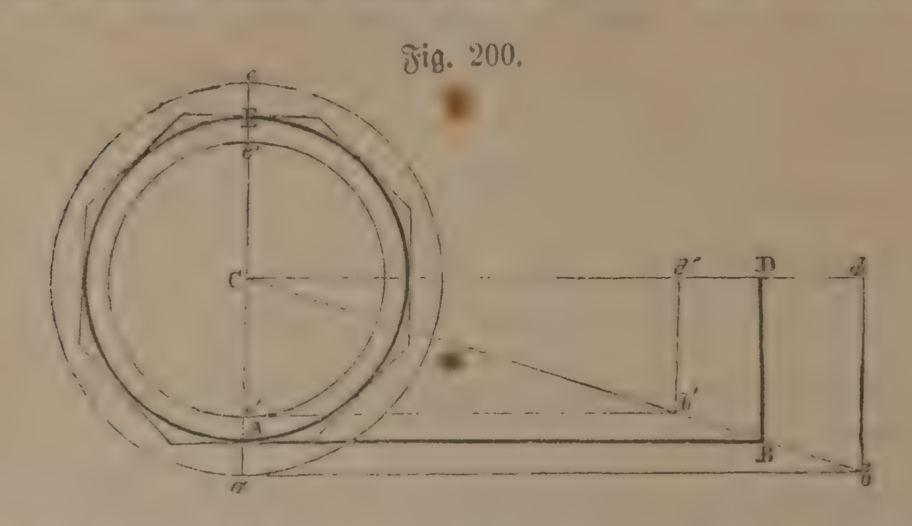
Beweis des Satzes VI., 1.

„Jeder Cylinder ist an Rauminhalt einem Prisma gleich, welches mit ihm gleich große Grundfläche und gleiche Höhe hat."

CA sei der Radius der Grundfläche eines (geraden oder schiefen) Cylinders, seine Höhe $= h$; AB sei dem halben Umfange der Grundfläche gleich.

Bildet man aus CA und AB das Rechteck $CABD$, so wird dieses nach Planim. IV., 26 der Basis des Cylinders an Inhalt gleichkommen und ein über $CABD$ errichtetes Prisma von der Höhe h an Rauminhalt so

Fig. 200.



groß wie der Cylinder sein. Denn gesetzt: der Cylinder wäre diesem Prisma nicht gleich, so müßte er entweder einem größeren oder einem kleineren Prisma gleich kommen, da es Prismen von jeder möglichen Größe gibt. Angenommen

1) er sei einem größeren Prisma gleich; wie dieses auch beschaffen sein möge, man kann es in ein solches verwandeln, welches die Höhe h und eine dem Rechtecke $CABD$ ähnliche Grundfläche $Cabd$ hat. Diese wird dann größer als $CABD$, also $Ca > CA$ sein. Um C sei mit Ca ein Kreis ae beschrieben: derselbe ist, wie sich aus Planim. VI., 22 leicht zeigen läßt, so groß wie das Rechteck $Cabd$; ferner sei, was immer möglich ist, der Grundfläche des Cylinders ein Polygon umgeschrieben, welches ganz in dem Kreise ae enthalten ist, und über diesem Polygone sei ein Prisma von der Höhe h errichtet, dessen Seitenkanten der Cylinderachse parallel sind. Dieses Prisma ist also ein dem Cylinder umgeschriebenes. Da seine Grundfläche kleiner als der Kreis ae, dieser aber dem Rechtecke $Cabd$ gleich ist, so ist auch das über dem Polygone stehende Prisma kleiner als dasjenige, dessen Grundfläche $Cabd$ und Höhe h ist. Das letztere ist aber der Annahme gemäß dem Cylinder gleich; also müßte, wäre die Annahme richtig, der Cylinder größer als das ihm umgeschriebene Prisma sein. Da aber der Cylinder ein Theil des Prisma ist, so findet gerade das Gegentheil Statt, der Cylinder kann daher keinem größeren Prisma als dem über $CABD$ in der Höhe h errichteten gleich sein. Wollte man

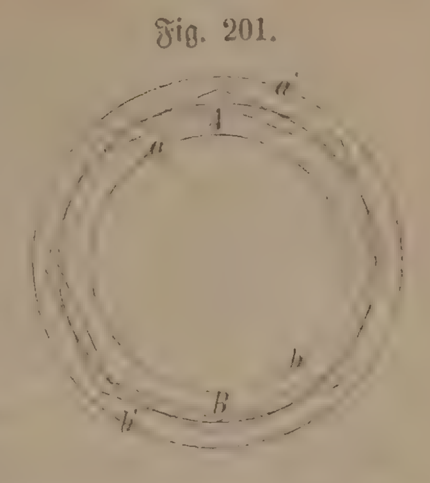
2) annehmen, der Cylinder sei gleich einem kleineren Prisma, etwa dem, welches das dem Rechtecke $CABD$ ähnliche, aber kleinere $Ca'b'd'$ zur Grundfläche und h zur Höhe hat, so ließe sich das Unstatthafte dieser Annahme in gleicher Weise darthun. An der Stelle eines dem Cylinder umgeschriebenen Prisma hat man nun ein ihm eingeschriebenes zu betrachten. Die Vergleichung desselben mit dem Cylinder führt zu gleichem Widerspruch wie bei 1.

Es bleibt daher nur übrig, den Cylinder dem Prisma über $CABD$ gleich zu setzen.

Beweis des Satzes VI., 2.

„Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, der mit ihm gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat."

Fig. 201.



Der Kreis AB sei die gemeinschaftliche Grundfläche eines Kegels und eines Cylinders, beide von einerlei Höhe h. Wäre nun der Kegel nicht der dritte Theil des Cylinders, so müßte er doch dem dritten Theile irgend eines größeren oder kleineren Cylinders von derselben Höhe h gleich sein: denn aus dem vorhergehenden Satze folgt, daß es Cylinder von jeder möglichen Größe und jeder gegebenen Höhe gibt. Es sei

1) der Kegel dem dritten Theile eines kleineren Cylinders gleich, etwa desjenigen, der zur Grundfläche den Kreis ab, übrigens dieselbe Achse wie der über AB hat. Construirt man nun, was immer möglich, ein dem Kreise AB eingeschriebenes Polygon, welches den Kreis ab ganz einschließt, und errichtet über demselben 1. eine Pyramide, welche dieselbe Spitze hat, wie der Kegel, 2. ein Prisma, dessen Seitenkanten der Achse des Cylinders parallel sind, so ist, da beide gleiche Höhe h haben, die Pyramide (V., 13) dem dritten Theile des Prisma gleich. Dieses Prisma ist aber größer als der Cylinder über ab, da es diesen ganz in sich enthält, also auch der dritte Theil des Prisma größer als der dritte Theil des Cylinders. Wäre nun die Annahme, daß der Kegel dem dritten Theile dieses Cylinders gleich ist, richtig, so müßte die Pyramide größer als der Kegel sein. Sie ist aber im Gegentheile kleiner als der Kegel, da sie ganz in ihm enthalten ist. Die Annahme kann daher nicht bestehen. Sei nun

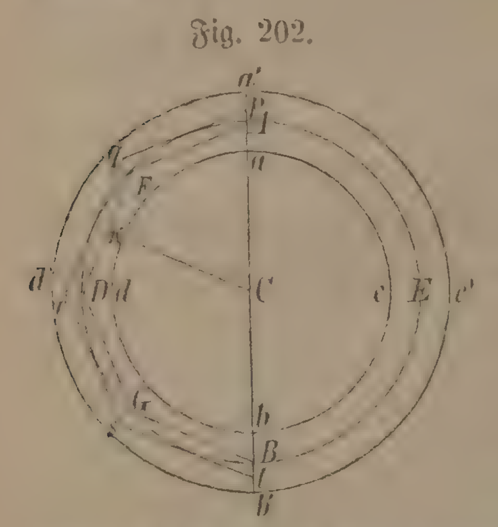
2) der Kegel dem dritten Theile eines größeren Cylinders, z. B. des über dem Kreise $a'b'$ errichteten, gleich, die Achse desselben sei die nämliche, wie die des Cylinders über AB. Man kann nun dem Kreise AB ein Polygon umschreiben, welches ganz im Kreise $a'b'$ enthalten ist. Ueber demselben sei, wie vorher, sowohl ein Prisma als eine Pyramide errichtet; das Prisma ist kleiner als der Cylinder über $a'b'$, da es ganz in ihm enthalten ist; also auch der dritte Theil des Prisma, d. i. die Pyramide, kleiner als der dritte Theil des Cylinders; der Annahme gemäß soll dieser dem Kegel gleich sein, also wäre der Kegel größer als die ihm umgeschriebene Pyramide; er ist aber im Gegentheil kleiner, daher ist auch die zweite Annahme falsch.

Demnach kann der Kegel nicht anders als dem dritten Theile gerade desjenigen Cylinders gleich sein, der mit ihm dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Beweis des Satzes VI., 6.

„Die Kugel ist an Rauminhalt gleich $\frac{2}{3}$ eines ihr umgeschriebenen Cylinders."

Fig. 202.



Die Kugel sei die durch Umdrehung des Halbkreises ADB um AB beschriebene. Wäre dieselbe nicht gleich $\frac{2}{3}$ eines ihr umgeschriebenen Cylinders, so müßte sie, da es (wie aus VI., 1 folgt) Cylinder von jeder möglichen Größe gibt, $\frac{2}{3}$ entweder eines kleineren oder eines größeren Cylinders gleich sein. Angenommen

1) die Kugel sei gleich $\frac{2}{3}$ eines kleineren Cylinders, etwa eines solchen, dessen Basis der Kreis $adbe$ und dessen Höhe $= AB$ ist. In dem Halbkreise ADB sei ein reguläres Halbpolygon eingeschrieben, dessen Apotheme $CK > Ca$. Der durch Umdrehung desselben um AB erzeugte Körper beträgt (VI., 5) $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Grundfläche einen Radius $= CK$ hat und dessen Höhe AB ist. Diese Grundfläche ist größer als der Kreis $adbe$, daher auch der vom Polygone beschriebene Körper größer als $\frac{2}{3}$ des Cylinders über $adbe$, dessen Höhe AB ist. Der Annahme nach sind $\frac{2}{3}$ dieses Cylinders der Kugel gleich; wäre sie richtig, so müßte der vom Polygone beschriebene Körper größer als die Kugel sein, was nicht sein kann, da er ein Theil der Kugel ist.

2) Die Kugel sei = $\frac{2}{3}$ eines größeren Cylinders, etwa desjenigen, der zwar dieselbe Basis $ADBE$, aber eine kleinere Höhe $a'b'$ hat. Beschreibt man nun mit Ca' (= Cb') einen Kreis $a'd'b'e'$ und construirt ein dem Halbkreise ADB umgeschriebenes Halbpolygon, welches ganz im Halbkreise $a'd'b'$ enthalten ist, so beträgt der durch Umdrehung desselben um AB erzeugte Körper (VI., 5) $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Basis der Kreis $ADBE$ und dessen Höhe die Umdrehungsachse pt ist. Da diese kleiner als $a'b'$, so ist auch der in Rede stehende Körper kleiner als $\frac{2}{3}$ eines über $ADBE$ errichteten Cylinders von der Höhe $a'b'$. Der Annahme gemäß ist diese $\frac{2}{3}$ der Kugel gleich, also müßte, wäre diese Annahme richtig, der vom Polygone beschriebene Körper kleiner als die Kugel sein. Jener Körper ist aber der Kugel umgeschrieben, daher größer wie sie; die zweite Annahme ist daher gleichfalls falsch, und es bleibt nur die These des Satzes als die richtige bestehen.

Der

Beweis des den Kugelsector betreffenden Satzes VI., 7

kann ganz in derselben Weise wie der vorhergehende geführt werden; eben so hat der nach gleicher Methode zu führende

Beweis des Satzes VI., 14 über den Inhalt eines Ringes

nicht die geringste Schwierigkeit; die Ausführung beider, welche zum größeren Theile nur eine Wiederholung der vorhergehenden Schlüsse sein würde, kann daher hier unterbleiben.

Anhang VIII.

Von hufförmigen Abschnitten des Cylinders und Kegels.

1. **Hufförmiger Abschnitt** des Cylinders oder Kegels (kürzer: **Huf**, Onglet, Ungula) ist ein Theil dieser Körper, der durch eine schief oder senkrecht gegen ihre Grundfläche gerichtete Ebene davon abgeschnitten wird. Ein solcher Abschnitt wird also von der schneidenden Ebene, einem Theile der Grundfläche (oder auch der ganzen) und einem Theile des Cylinder- oder Kegelmantels begrenzt. Jener Theil der Grundfläche ist als die **Grundfläche**, der Theil des Mantels als der **Mantel** des **Hufes** anzusehen. **Höhe** dieses letzteren ist der Abstand des von der Grundfläche entferntesten seiner Punkte von dieser letzteren.

Wir beschränken uns hier auf die hufförmigen Abschnitte des **senkrechten** Cylinders und Kegels, weil sie die einzigen sind, deren Mantel und Körperinhalt sich durch die Mittel der Elementar-Geometrie bestimmen lassen.

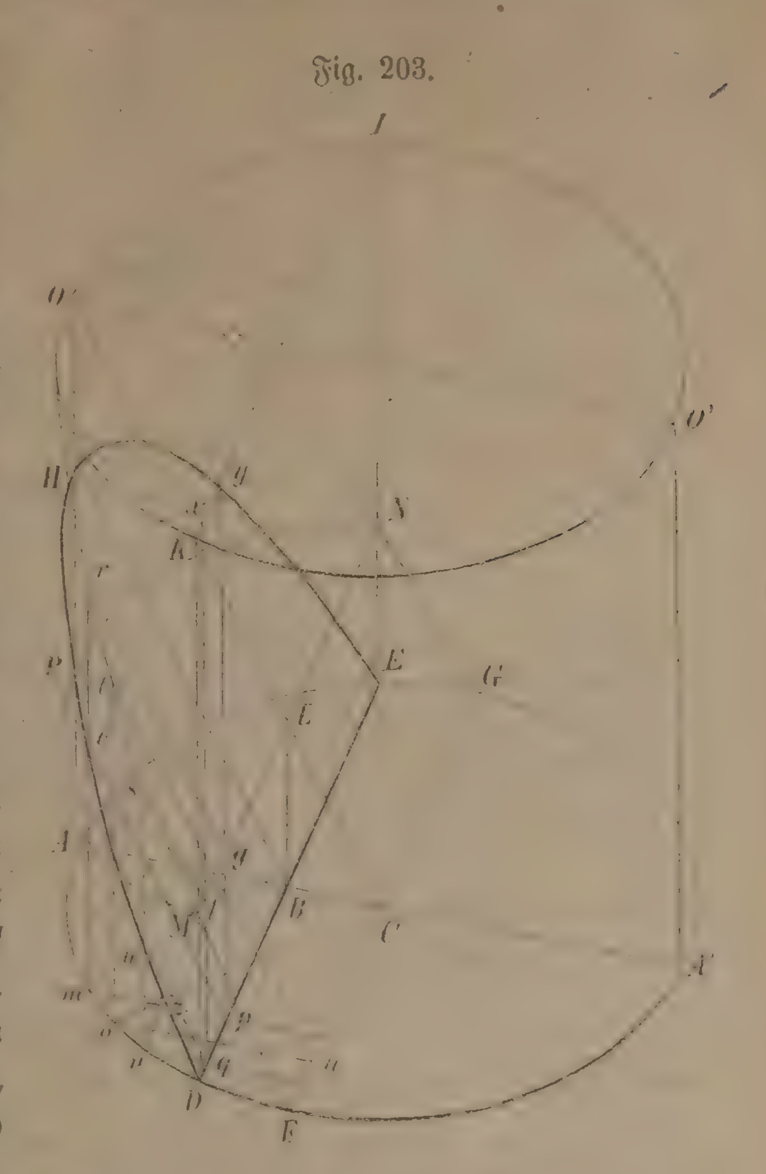
2. **Aufgabe. Den Mantel eines hufförmigen Cylinderabschnittes quadriren, d. h. seinen Flächeninhalt zu bestimmen***).

Auflösung. $ADEH$ sei ein hufförmiger Cylinderabschnitt; seine Grundfläche ist das Kreissegment ADE, welches wir fürs Erste kleiner als die halbe Grundfläche $ADA'E$ des Cylinders annehmen. Legt man durch die Achse dieses letzteren eine auf der Sehne DE senkrechte Ebene, so bildet der Durchschnitt dieser Ebene mit dem Hufe ein rechtwinkeliges Dreieck ABH, dessen Kathete AH die Höhe des Hufes ist; der dieser gegenüberliegende Winkel ABH ist die Neigung der Ebene DHE gegen die Grundfläche. Um nun zur Flächenbestimmung des Mantels $ADEH$ zu gelangen, lege man durch den Mittelpunkt C der Basis des Cylinders eine zweite Ebene, parallel der DHE, deren Durchschnitt mit dem Mantel FOG sei (FG also ein Durchmesser $\parallel DE$).

*) **Anmerkung.** Die Quadratur einer Fläche wird hier als ausgeführt oder abgemacht betrachtet, sobald sie auf die von geradlinigen Figuren und Kreisen oder Kreissegmenten zurückgeführt ist.

Es sei ferner durch *DE* eine auf d. Grundfläche senkrechte Ebene gelegt, deren Durchschnitt mit dem Cylinder *AOO'A'* (den man als den gegebenen ansehen kann) das Rechteck *DEJK* bildet; der Durchschnitt dieser beiden Ebenen selbst aber sei *MN*. Durch diese Construction gewinnt man zwei Flächenräume auf dem Cylindermantel, deren einer *DAENOM* von den Bogen *DAE*, *MON* und den geraden Linien *DM* und *EN*; der andere *DHENOM* von den Bogen *DHE*, *MON* und denselben Geraden begrenzt wird, welche jeder für sich leicht quadrirbar sind,

Fig. 203.



und deren Unterschied der Mantel *ADEH* des Hufes ist. Zu diesem Zwecke sehe man die Grundfläche des Cylinders als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten an, also den Mantel desselben als eine Summe unendlich kleiner Rechtecke, die jene Seiten zu Grundlinien haben; der zwischen den Bogen *DAE* und *MON* begriffene Theil eines jeden dieser Rechtecke bildet ein Trapez, wie *musr*, und die Fläche *DAENOM* ist als die Summe dieser unzählig vielen Trapeze anzusehen. Gleichzeitig bildet der zwischen *DHE* und *MON* begriffene Theil eines solchen Trapezes ein unendlich kleines Parallelogramm *rrws* und die Fläche *DHENOM* ist die Summe dieser Parallelogramme. Um nun

1) die erste dieser beiden Summen zu finden, fälle man aus *m* und *n* auf *DE* die Perpendikel *mp* und *nq* und errichte in *q* und *p* auf *DE* in

der Ebene des Rechteckes $DEJh$ die Senkrechten qx und py; das hiedurch entstehende Rechteck $pqxy$ wird dem Trapez $mnsr$ an Inhalt gleich sein. Denn halbirt man mn in o, zieht $ot \parallel mr$ oder ns, so ist, da $ot \perp mn$, das Trapez $mnsr = mn \times ot$. Aus o fälle man $ou \perp FG$, verbinde u mit t, o mit C und ziehe durch n mit DE eine Parallele nz bis zur mp; es ist dann wegen Gleichheit der Winkel:

$$\triangle\, mnz \sim Cou \text{ und } \triangle\, out \sim ACO; \text{ daher:}$$

$$mn : \begin{cases} nz \\ pq \end{cases} = \begin{cases} Co \\ CA \end{cases} : ou = \begin{cases} AO \\ qx \end{cases} : ot,$$

woraus folgt, daß $mn \times ot = pq \times qx$, also das Trapez $mnsr$ gleich dem Rechtecke $pqxy$. Da dasselbe von allen übrigen Trapezen gilt, aus welchen die Fläche $DAENOM$, der zu Grunde gelegten Vorstellung gemäß, besteht, so erhellt, daß diese ganze Fläche dem Rechtecke $DEJh$ gleich ist, dessen Grundlinie die Sehne DE und dessen Höhe AO, d. i. der Höhe des Hufes $FAGO$, gleich ist.

Was 2) die andere, einen Theil der ersten bildende Fläche $DHENOM$ anbelangt, so sind die Parallelogramme, aus welchen sie nach dem oben Gesagten besteht, sämmtlich gleich; denn ein solches Parallelogramm, wie $rvws$ ist, da rv und sw auf mn senkrecht stehen, $= rv \times mn = OH \times mn$; oder, wenn MN und CO sich in L schneiden, auch $= BL \times mn$. Die Summe der Parallelogramme oder die Fläche $DHENOM$ ist daher einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie so lang wie der Kreisbogen DAE und dessen Höhe BL ist, also auch dem Mantelstücke $DAENPM$ eines Cylinders über der Grundfläche des gegebenen und von der Höhe BL.

Der Mantel des hufförmigen Abschnittes $HDAE$ ist nun der Unterschied zwischen den beiden so bestimmten Flächen $DAENOM$ und $DHENOM$.

Ist das die Grundfläche des Hufes bildende Kreissegment größer als der Halbkreis, so gilt, wie man leicht finden wird, dasselbe, mit der Modification, daß der Mantel des Hufes nun die Summe der beiden vorhin betrachteten Flächen, also auch der ermittelten, ihnen gleichen, Rechtecke oder Producte ist.

1. Zusatz. Ist die Grundfläche des Hufes, wie die von $AFGO$, ein Halbkreis, so verschwindet die zweite der vorhin betrachteten Flächen $DHENOM$ mit BL, und der Mantel eines solchen Hufes ist einfach dem Rechtecke aus

dem Durchmesser FG und seiner Höhe AO gleich. Ist die Grundfläche ein ganzer Kreis, so ist, wie unmittelbar einzusehen, der Mantel des Hufes die Hälfte des Cylindermantels bei gleicher Höhe.

2. Zusatz. Der Radius der Grundfläche des Cylinders CA sei $= r$, die Höhe des hufförmigen Abschnittes $AH = h$, die Höhe des Kreissegmentes, welches seine Grundfläche bildet, $AB = a$; so ergibt sich aus diesen drei als gegeben betrachteten Stücken zunächst $AO = \frac{hr}{a}$, $BL = \frac{h(r-a)}{a}$ oder $\frac{h(a-r)}{a}$, je nachdem $a <$ oder $> r$; ferner, wenn man die das Kreissegment begrenzende Sehne DE mit c, den begrenzenden Bogen DAE mit b und den entsprechenden Centriwinkel DCE mit β bezeichnet:

$$c = 2\sqrt{a(2r-a)},\ b = \frac{\beta}{180^\circ}\pi r;$$

der Winkel β oder vielmehr $\frac{1}{2}\beta$ muß trigonometrisch durch seinen Cosinus bestimmt werden; es ist nämlich $\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{r-a}{r}$. Drückt man mittels dieser, theils unmittelbar gegebenen, theils daraus abgeleiteten Werthe den Inhalt der oben betrachteten Flächen aus, so erhält man:

Fläche $DAENOM$ = Rechteck $DEJK = \frac{chr}{a}$,

Fläche $DHENOM$ = Bogen $DAE \times BL = \frac{bh(r-a)}{a}$ oder $\frac{bh(a-r)}{a}$,

je nachdem $a <$ oder $> r$; im ersten Falle ist der Mantel des Hufs die Differenz, im zweiten die Summe beider Flächen; daher ist dieser Mantel im ersten Falle $= \frac{h}{a}\left\{cr - b(r-a)\right\}$, im anderen Falle $= \frac{h}{a}\left\{cr + b(a-r)\right\}$. Beide Ausdrücke vereinigen sich in dem jedenfalls gültigen: Mantel des Hufes $= h\left\{b - \frac{r}{a}(b-c)\right\}$, dessen geometrische Bedeutung zu Tage liegt und der sich auch leicht durch ähnliche Schlüsse, wie die oben gebrauchten, unmittelbar beweisen ließe.

3. Aufgabe. Den cubischen Inhalt des hufförmigen Cylinderabschnittes zu finden.

Auflösung. Betrachtet man, wie vorhin, die Grundfläche des Cylinders als ein reguläres Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen, Seiten, mithin auch die Fläche $DAENOM$ (Fig. 203) als die Summe unzählig vieler, unendlich kleiner, Trapeze wie $mnsr$; und sieht diese Trapeze als die Grundflächen eben so vieler Pyramiden an, deren Spitze C ist, so haben diese Pyramiden alle den Radius der Grundfläche zur gemeinschaftlichen Höhe und ihre Summe ist daher einer Pyramide von derselben Höhe gleich, deren Grundfläche so groß wie die Fläche $DAENOM$ ist, mithin so groß wie das Rechteck $DEJh$ (2). Diese Summe bildet aber den aus dem Körper $DAENOM$ und der Pyramide $CDENM$ zusammengesetzten Körper $CDAENOM$. Hieraus folgt, daß der Körper $DAENOM$ dem Ueberschuß der ersten Pyramide über die zweite gleich ist; sein Inhalt ist demnach: $\frac{1}{3}\, DE \cdot AO \cdot CA - \frac{1}{3}\, DE \cdot OH \cdot BC$. Von diesem Körper ist der Raum $DHENOM$ abzuziehen, um den cylindrischen Huf zu erhalten; es bleibt daher dieser Raum zu bestimmen. Zu dem Ende theile man ihn durch Ebenen, welche parallel mit AOC durch m, n, ꝛc. geführt sind, in Prismen, deren jedes von zwei dieser Ebenen, von den Ebenen DHE, FOG, $DEJh$ und von dem Elementartrapeze des Mantels eingeschlossen wird; ein solches Prisma sei $rsfgrwqp$ (f und g bezeichnen in der Figur die Durchschnittspunkte von MN mit qx und py); seine Grundflächen sind die congruenten Trapeze $rsfg$ und $vwqp$. Leicht ist es auf ähnliche Weise, wie in IV., 3 zu zeigen, daß dieses schiefe Prisma einem senkrechten Prisma über $mnqp$ gleich ist, dessen Höhe DM oder DL ist; denn, zieht man beide Körper von dem Obelisken $mnpqfgsr$ ab, so bleiben congruente Körper übrig; daher ist auch der ganze von den Ebenen DHE und MON, dem Mantel und dem Rechtecke $DENM$ begrenzte Körper $DHENOM$ einem senkrechten Prisma oder Cylinderstücke gleich, dessen Höhe BL und dessen Grundfläche das Kreissegment DAE die Grundfläche des Hufes ist. Hiermit ist die Bestimmung des cubischen Inhaltes auf Bekanntes zurückgeführt.

Zusatz 1. Mit Beibehaltung der in der vorigen Nummer gebrauchten Bezeichnungen ist die Grundfläche des Hufes $G = \frac{1}{2}\,[ac + (b - c)\,r]$ und sein cubischer Inhalt $= \frac{1}{3}\, ch\,(2r - a) - \frac{h}{a}\,(r - a)\,G$; substituirt man im letzteren Ausdrucke für G seinen Werth nach dem ersten und berücksichtigt den von c, so erhält man nach den gehörigen Reductionen:

$$\text{Inhalt des Cylinderhufes} = \frac{h}{2a}\left\{c\,(r^2 - \tfrac{1}{12}\,c^2) - br\,(r - a)\right\}.$$

Zusatz 2. Ist die Grundfläche des Hufes ein Halbkreis, so ist $a = r$, $c = 2r$, $b = \pi r$, daher der Huf $= \frac{2}{3}hr^2$ d. h. der Huf beträgt $\frac{2}{3}$ eines Prisma, dessen Grundfläche $= r^2$ und dessen Höhe $= h$ ist. Hat der Huf einen vollen Kreis zur Basis, so beträgt er, wie sich unmittelbar einsehen läßt, $\frac{1}{2}\pi r^2 h$, d. i. die Hälfte des Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe.

4. Die Lösung der nun folgenden Aufgaben über die hufförmigen Abschnitte des geraden Kegels erfordert zu ihrer Durchführung die Kenntniß der Quadratur der Kegelschnitte, mit deren Theorie der Gegenstand überhaupt eng zusammenhängt. Obgleich diese Theorie erst im vierten Theile dieses Werkes ihre Stelle finden wird, so tragen wir doch kein Bedenken, hier das Nöthige daraus durch Anführung der betreffenden Sätze zu anticipiren und für deren Beweis auf den vierten Theil zu verweisen, damit auf diese Weise die Möglichkeit gewonnen werde, alles die hufförmigen Abschnitte Betreffende hier zusammen zu stellen. Jene Sätze aber sind:

a. Die Projection eines jeden Kegelschnittes auf eine von der seinigen verschiedene Ebene ist wieder ein Kegelschnitt derselben Art.

b. Jedes **Parabelsegment** (d. i. der zwischen einem Bogen der Parabel und seiner Sehne enthaltene Flächenraum) beträgt $\frac{2}{3}$ eines Rechteckes, dessen Grundlinie die Sehne des Segmentes ist und dessen gegenüberliegende Seite die Parabel berührt.

c. Haben zwei Ellipsen (den Kreis inbegriffen) oder auch zwei Hyperbeln eine Achse gemeinschaftlich (die andere sei verschieden), und man errichtet auf ihr eine Senkrechte, so verhalten sich die durch diese Senkrechte abgeschnittenen auf einerlei Seite von ihr liegenden Segmente beider Figuren wie die Theile der Senkrechten, welche die Segmente begrenzen.

d. Zwei aus dem Mittelpunkte einer Hyperbel nach den Endpunkten eines Bogens derselben gezogene gerade Linien bilden als Radien mit diesem Bogen einen **hyperbolischen Sector**. Ist die Hyperbel eine **gleichseitige** und einer jener Radien die halbe Querachse (a), sind ferner x und y die senkrechten Abstände (Coordinaten) des Endpunktes des Bogens von den Achsenrichtungen, so verhält sich der Sector zum Quadrate über der halben Querachse a, wie der natürliche Logarithmus der Zahl $\frac{x+y}{a}$ zu 2.

Außer diesen der Theorie der Kegelschnitte entlehnten Sätzen kommt auch noch der der Projectionslehre angehörige, leicht zu beweisende Satz im Folgenden zur Anwendung:

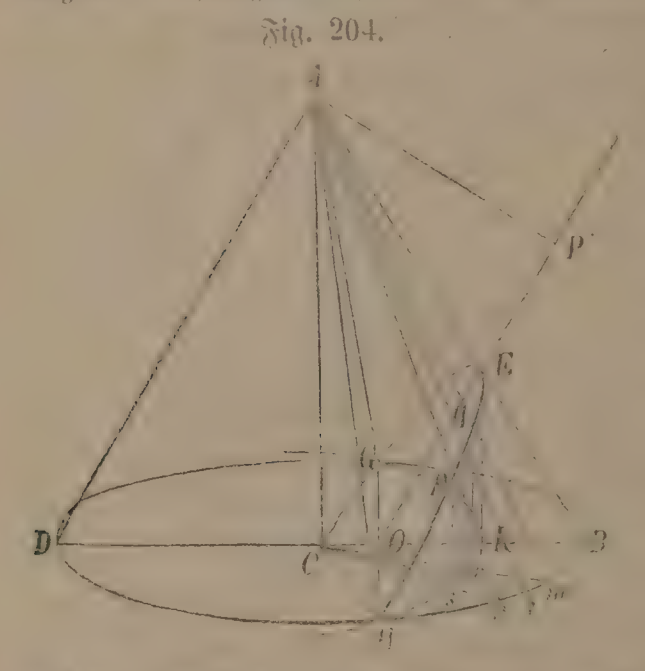
e. Jedes Dreieck verhält sich zu seiner Projection auf einer gegen die seinige schief gerichteten Ebene, wie irgend eine gegen den Durchschnitt beider Ebenen senkrecht gerichtete gerade Linie in der Ebene des Dreieckes zu ihrer Projection in der anderen.

Ueber diesen allgemein von jeder Figur geltenden Satz vergleiche man den dritten Theil dieses Lehrbuches, „Ebene und sphärische Trigonometrie", XII., 2.

5. **Aufgabe.** Den Mantel des von einer Parabel begrenzten hufförmigen Abschnittes eines geraden Kegels seinem Inhalte nach zu bestimmen.

Auflösung. $EGBH$ sei der hufförmige Abschnitt eines senkrechten Kegels ADB, dessen Achse AC, der ihn begrenzende Kegelschnitt GEH eine Parabel sei. Die Ebene dieses Schnittes treffe die Grundfläche des Kegels in der Sehne GH; zieht man durch deren Mitte O den Durchmesser DB der Grundfläche, so steht GH nicht allein auf DB, sondern auch auf der Ebene ADB senkrecht; daher auch die Ebene GEH auf ADB. Der Durchschnitt dieser beiden letzteren sei OE. Bekanntlich muß, soll GEH eine Parabel sein,

Fig. 204.



OE der Kegelseite AD parallel laufen, weßhalb OEB ein gleichschenkeliges Dreieck ist, worin $EO = EB$. Fällt man also $EK \perp OB$, so ist K die Mitte von OB; EK ist die Höhe des Kegelhufes.

Um nun den Mantel dieses letzteren seiner Größe nach zu ermitteln, betrachte man den von den Kegelseiten AG, AH und dem Bogen GBH begrenzten Theil des Kegelmantels $AGBH$; da derselbe sich zum ganzen Kegelmantel eben so verhält, wie der Bogen GBH zum ganzen Umfange der Grundfläche, so darf sein Inhalt als bekannt oder gegeben angesehen werden. Er wird aber durch die Parabel in zwei Stücke getheilt, deren eines ($EGBH$)

der zu bestimmende Mantel des Hufes ist; es kommt also, um diesen zu erhalten, nur darauf an, die Größe des anderen von AG, AH und der Parabel begrenzten Stückes $AGEH$ zu ermitteln.

Zu diesem Ende projicire man die Parabel GEH auf die Grundfläche des Kegels; die Projection ist eine durch G, K und H gehende Parabel, deren Scheitel K Projection des Scheitels E der ersten Parabel ist *). Zieht man nun noch CG und CH, so ist der parabolische Sector $CGKH$ die Projection der in Rede stehenden konischen Fläche $AGEH$. Beide stehen in einem leicht aufzufindenden Verhältnisse. Sieht man nämlich die Grundfläche des Kegels als ein reguläres Polygon von unzählig vielen, unendlich kleinen, Seiten an, deren eine etwa mn ist, so muß man folgerichtig den Kegelmantel als die Summe eben so vieler, unendlich kleiner, gleichschenkeliger Dreiecke betrachten, deren Grundlinien jene Seiten sind und deren Höhe $= AB$ ist. Amn ist eines dieser Dreiecke; treffen die Seiten Am und An desselben die Parabel GEH in p und q, so ist gleichzeitig Apq als ein Dreieck anzusehen, welches einen Theil der Fläche $AGEH$ ausmacht, und die Projection desselben Crs als ein Dreieck, welches einen Theil des parabolischen Sectors $CGKH$ bildet. Beide Flächen sind als die Summen unzählig vieler solcher Dreiecke zu betrachten. — Dem in der vorigen Nummer unter e) aufgeführten Satze gemäß verhält sich aber $\triangle\, Apq$ zu $\triangle\, Crs$, desgleichen $\triangle\, Amn$ zu $\triangle\, Cmn$, wie die Höhe Ai des Dreieckes Amn, da sie senkrecht auf mn steht, zu Ci, oder auch, was bei der zu Grunde gelegten Ansicht dasselbe ist, wie $AB : CB$, d. i. wie die Seitenlänge des Kegels zum Radius seiner Grundfläche; deßhalb verhält sich nun auch die ganze Fläche $AGEH$ zum parabolischen Sector $CGKH$ als der Projection derselben wie $AB : CB$. Die Quadratur der ersteren Fläche ist dadurch auf die der letzteren reducirt und die Aufgabe als gelöst zu betrachten. Es bleibt nur die Ausführung zur Aufstellung einer Formel. Gegeben sei:

die Seitenlänge des Kegels $AB = a$,
der Radius seiner Grundfläche $CB = r$,
der Abstand der Kegelspitze A vom Scheitel E des hufförmigen Abschnittes oder der ihn begrenzenden Parabel $AE = e$.

In der Wahl dieser Stücke leitet die Absicht, für die zu bestimmende Größe einen möglichst einfachen Endausdruck zu gewinnen. Der Weg dazu ist folgender:

*) Der Brennpunkt der Parabel GKH ist C.

Aus $AB = a$, $DB = 2r$, $AE = e$ ergibt sich zunächst deren vierte Proportionale $DO = \frac{2re}{a}$, so wie $OB = \frac{2r(a-e)}{a}$, dann die doppelte mittlere von diesen, d. i. die die Grundfläche des Hufes begrenzende Sehne (man bezeichne sie der Kürze wegen mit c) $GH = c$ $= \frac{4r}{a}\sqrt{e\,(a-e)}$. Nach dem in der vorigen Nr. unter b angeführten Satze beträgt das Parabelsegment GHK zwei Drittel eines aus GH und OK gebildeten Rechteckes; daher, und weil $OK = \frac{1}{2}\,OB$ ist, das Segment $GHK = \frac{2cr\,(a-e)}{3a}$. Für das Dreieck CGH ergibt sich: $\triangle\ CGH = \frac{cr\,(2e-a)}{2a}$; daher der parobolische Sector $CGKH = \frac{cr\,(a+2e)}{6a}$. Da sich nun dieser Sector zum Theile des Kegelmantels, dessen Projection er ist, d. i. zur Fläche $AGEH$ wie r zu a verhält, so ist die Fläche $AGEH = \frac{1}{6}\,c\,(a+2e)$.

Der die Grundfläche des Kegelhufes begrenzende Bogen GBH sei $= b$, der entsprechende Winkel am Mittelpunkte $\measuredangle\ GCH = 2\varphi$. Soll φ aus den gegebenen Stücken berechnet werden, so kann dieses nur mittels einer seiner trigonometrischen Functionen geschehen, etwa des Cosinus, es ist nämlich $\cos\varphi = \frac{2e}{a} - 1$, dann $b = \frac{\varphi}{90^\circ}\pi r$. Ist hiernach φ und damit auch b gefunden, so ist der von AG, AH und dem Bogen GBH begrenzte Theil des Kegelmantels $AGBH = \frac{1}{2}\,ab$; zieht man hievon die Fläche $AGEH$ ab, so erhält man den Mantel des hufförmigen Abschnittes $EGBH$ oder:

$$M = \tfrac{1}{2}\,ab - \tfrac{1}{6}\,c\,(a+2e).$$

Die ganze Oberfläche des Hufes ist:

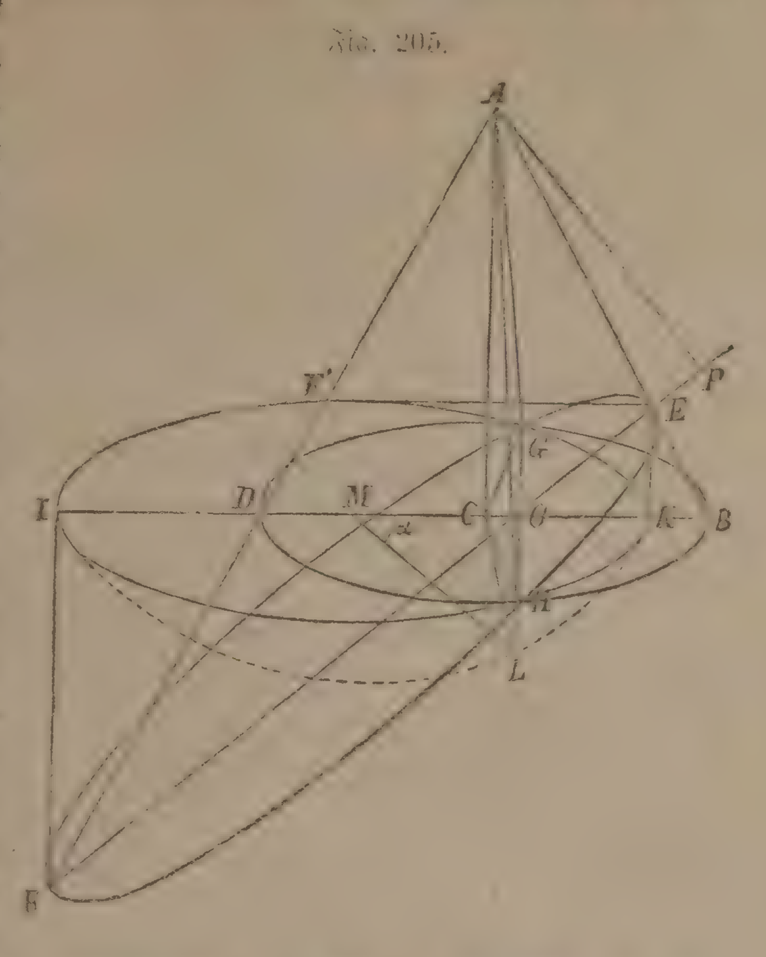
$$\tfrac{1}{2}\,(a+r)\,(b+c) - ce\left(1 - \frac{r}{a}\right).$$

Zusatz. Liegt E in der Mitte der Kegelseite AB, so fällt O in C und die Grundfläche des Hufes ist ein Halbkreis. Es ist dann $e = \frac{1}{2}\,a$, $b = \pi r$, $c = 2r$, $M = (\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3})\,ar$.

6. **Aufgabe.** Den Mantel des vom Segmente einer Ellipse begrenzten Hufes beim senkrechten Kegel zu finden.

Die Auflösung ist hier im Allgemeinen dieselbe wie vorher. Die den hufförmigen Abschnitt AGEH mit ihrem Segmente GEH begrenzende Ellipse sei EGFH, GH der Durchschnitt ihrer Ebene mit der Grundfläche des Kegels; der Durchmesser DB sei senkrecht auf GH, daher auch der Achsenschnitt ADB senkrecht zur Ebene der Ellipse; der Durchschnitt beider sei EF; EF ist die große Achse der Ellipse. Aus den Endpunkten E und F dieser Achse fälle man auf BD die Perpendikel EK und FI. Wird nun die Ellipse EGFH auf die Grundfläche des Kegels projicirt, so ist die Projection gleichfalls eine Ellipse, welche durch die Punkte G, I, H und K geht und deren große Achse IK ist. M sei deren Mitte und über IK als Durchmesser ein Halbkreis beschrieben, welcher die verlängerte gemeinschaftliche Sehne beider Ellipsen und der Grundfläche GH in L treffe.

Fig. 205.



Der elliptische Sector CGKH ist nun die Projection der von AG, AH und dem elliptischen Bogen GEH begrenzten konischen Fläche AGEH und verhält sich daher, was ganz wie in der vorigen Nummer bewiesen wird, zu dieser Fläche wie CB zu AB. Aus der Quadratur der einen dieser Flächen folgt also gleich die der anderen. Das Nähere gibt die folgende Ausführung. Gegeben sei:

die Seitenlänge des Kegels $AB = a$,

der Radius seiner Grundfläche $CB = r$,

die Abstände der Kegelspitze von den Endpunkten der großen Achse der Ellipse, nämlich $AE = c$ und $AF = f$.

Aus $AD = a$, $AF = f$, $DC = r$ ergibt sich zunächst deren vierte Proportionale $CI = \frac{rf}{a}$, so wie aus $AB = a$, $AE = e$, $CB = r$ deren vierte $CK = \frac{re}{a}$; aus beiden deren Summe $IK = \frac{r\,(e+f)}{a}$.

Zieht man ferner durch E mit BD eine Parallele EE' bis zur AD', so ergibt sich aus $FE' = f - e$, $FD = f - a$ und $EE' = 2CK = \frac{2re}{a}$, deren vierte Proportionale $DO = \frac{2re\,(f-a)}{a\,(f-e)}$, woraus $OB = BD - DO = \frac{2rf\,(a-e)}{a\,(f-e)}$ und aus diesen beiden einestheils deren halbe Differenz $CO = \frac{r\,(2\,ef - ea - fa)}{a\,(f-e)}$, andererseits deren mittlere Proportionale $OH = \frac{2r\sqrt{ef\,(f-a)\,(a-e)}}{a\,(f-e)}$. Um noch OL auszudrücken, hat man OI und OK zu suchen. Es ist aber

$FE' : FD = FE : FO = IK : IO$ und

$FE' : E'D = FE : OE = IK : KO$; daher und da

$FE' = f - e$, $FD = f - a$, $E'D = a - e$, $IK = \frac{r\,(e+f)}{a}$, ist $IO = \frac{r\,(f-a)\,\,(e+f)}{a\,(f-e)}$, $OK = \frac{r\,(a-e)\,(e+f)}{a\,(f-e)}$, woraus ihre mittlere Proportionale $OL = \frac{r\,(e+f)\sqrt{(f-a)\,(a-e)}}{a\,(f-e)}$. Aus diesen Werthen von OH und OL folgt, daß $OH : OL = 2\sqrt{ef} : (e+f)$.

Nach dem in Nr. 4 bei c) angeführten Satze verhält sich das durch die Sehne GH abgeschnittene halbe elliptische Segment OKH zu dem durch dieselbe (verlängerte) Sehne abgeschnittenen halben Kreissegmente OLK wie $OH : OL$; eben so verhält sich aber auch das Dreieck COH zum Dreiecke COL; daher verhält sich auch $OKH + COH$ zu $OKL + COL$, d. i. es verhält sich der elliptische Sector*) CHK zum Flächenraume CLK wie $OH : OL$. Hieraus läßt sich der erstere finden. Denn zieht man ML und bezeichnet den Winkel CML mit α, so ergibt sich leicht zur Bestimmung des Winkels α aus einer seiner trigonometrischen

*) C ist einer der beiden Brennpunkte der Ellipse.

Funktionen $\cos\alpha = \frac{e + f - 2a}{f - e}$ oder auch $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{f - a}{f - e}}$. Da nun $ML = \frac{1}{2}\, lk = \frac{r\,(e + f)}{2a}$, so ist der Kreissector MLk $\frac{\alpha}{360^{\circ}}\,\pi \cdot ML^2 = \frac{\alpha}{360^{\circ}}\,\pi \left(\frac{r\,(e + f)}{2a}\right)^2$, ferner ist das Dreieck $MCL = \frac{1}{2}\, MC \cdot OL = \frac{r^2\,(e + f)\sqrt{(f - a)\,(a - e)}}{4a^2}$, folglich der Unterschied beider, d. i. der Flächenraum $CLK = \frac{r^2\,(e + f)}{4a^2}\left\{\frac{\alpha\pi}{360^{\circ}}\,(e + f) - \sqrt{(f - a)\,(a - e)}\right\}$. Da dieser sich zu CHK wie $OL : OH$ d. i. wie $(e + f) : 2\sqrt{ef}$ verhält und das Doppelte von CHK zu der im Kegelmantel liegenden Fläche $AGEH$ wie $r : a$, so ist diese letztere Fläche $= \frac{r}{a}\sqrt{ef}\left\{\frac{\alpha\pi}{360^{\circ}}\,(e + f) - \sqrt{(f - a)\,(a - e)}\right\}$. Setzt man, der Kürze wegen, die Sehne, welche die Grundfläche des Kegelhufes begrenzt, $= c$, so daß $GH = c = \frac{4\,r\sqrt{ef\,(f - a)\,(a - e)}}{a\,(f - e)}$, so erhält man auch: Fläche $AGEH = \frac{\alpha\pi}{360^{\circ}} \cdot \frac{r}{a}\,(e + f)\sqrt{ef} - \frac{1}{4}\,c\,(f - e)$.

Um zum Ausdrucke für den Inhalt des Mantels überzugehen, sei der die Grundfläche des Hufes begrenzende Bogen $GBH = b$, der entsprechende Centriwinkel $GCH = 2\varphi$; dieser wird aus dem Cosinus seiner Hälfte gefunden, indem $\cos\varphi = \frac{2\,ef - a\,(e + f)}{a\,(f - e)}$. Es ist dann $b = \frac{\varphi}{90^{\circ}} \cdot \pi r$, der zwischen den Kegelseiten AG und AH enthaltene Theil $AGBH$ des Mantels $= \frac{1}{2}\,ab$; zieht man hiervon die Fläche $AGEH$ ab, so bleibt als Ausdruck für den Mantel M des Kegelhufes:

$$M = \frac{1}{2}\,ab + \frac{1}{4}\,c\,(f - e) - \frac{\alpha\pi}{360^{\circ}} \cdot \frac{r}{a}\,(e + f)\sqrt{ef}.$$

Zusatz. Ist die Grundfläche des Hufes die des Kegels, also ein ganzer Kreis, so ist $f = a$, $c = 0$, $\alpha = 180^{\circ}$, $\varphi = 180^{\circ}$, $b = 2\pi r$, $M = \pi r\left\{a - \frac{1}{2}\,(a + e)\sqrt{\frac{e}{a}}\right\}$.

7. Aufgabe. Den Mantel des vom Segmente einer Hyperbel begrenzten Hufes beim senkrechten Kegel zu finden.

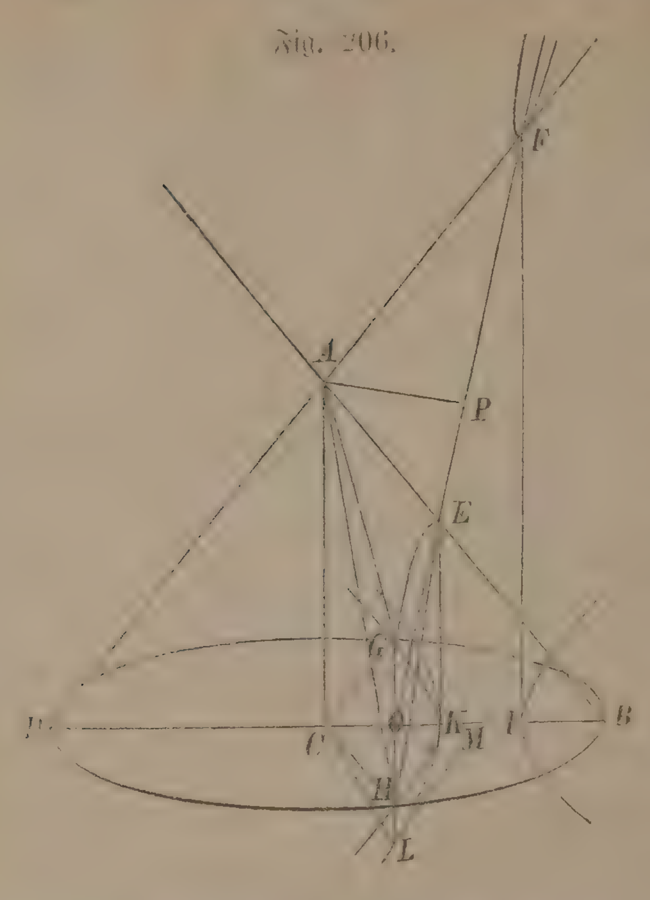


Fig. 206.

Die Auflösung hat nur Schritt für Schritt der in (6) für die Ellipse gegebenen zu folgen, weßhalb die correspondirenden Punkte in den Figuren zu beiden mit denselben Buchstaben bezeichnet sind. Den einzigen Unterschied macht die Quadratur des hyperbolischen Sectors *MLK*, der an die Stelle des Kreissectors *MLK* der vorigen Figur tritt und sich nur durch Anwendung der Logarithmen quadriren läßt. Der Analogie mit dem vorigen folgend, wird man finden:

$IC = \frac{rf}{a}$, $CK = \frac{re}{a}$, $IK = \frac{r\,(f-e)}{a}$; dann $DO = \frac{2re\,(f+a)}{a\,(f+e)}$,

$$OB = \frac{2\,rf\,(a-e)}{a\,(f+e)},\quad CO = \frac{r(2\,ef+ea-fa)}{a\,(f+e)},$$

$OH = \frac{2r\sqrt{ef\,(f+a)\,(a-e)}}{a\,(f+e)}$. Beschreibt man noch über *KI* als Achse eine gleichseitige Hyperbel und trifft *GH* dieselbe verlängert in *L*, so findet sich aus $IO = \frac{r(f+a)\,(f-e)}{a\,(f+e)}$ und $OK = \frac{r\,(a-e)\,(f-e)}{a\,(f+e)}$, deren mittlere Proportionale $OL = \frac{r\,(f-e)\sqrt{(f+a)\,(a-e)}}{a\,(f+e)}$, daher nun $OH : OL = 2\sqrt{ef} : (f-e)$. — Nach dem in Nr. 4 bei c) angeführten Satze verhält sich auch hier das halbe hyperbolische Segment *OKH* zu dem entsprechenden halben Segment *OKL* der gleichseitigen Hyperbel wie *OH* : *OL*. Eben so verhält sich das $\triangle\, COH$ zum $\triangle\, COL$; daher verhält

sich auch der hyperbolische Sector CHK zum Sector CLK wie $OH : OL$ d. i. wie $2\sqrt{ef} : (f - e)$. Hierdurch läßt sich der erstere finden. Denn zieht man ML, so erhält man einen hyperbolischen Sector MKL, welcher sich nach dem in 4 unter d angeführten Satze zu $\frac{1}{4}\, KI^2$ wie der natürliche Logarithmus der Zahl $\frac{MO + OL}{\frac{1}{2}\, KI}$ zu 2 verhält; da nun $MO = \frac{1}{2}\,(IO + OK) = \frac{r\,(f - e)\,(2 + f - e)}{2a\,(f + e)}$ [OL und KI sind schon oben angegeben], so ist jener Sector MKL = $\left(\frac{r\,(f - e)}{2a}\right)^2 \cdot log.\ nat.\ \frac{\sqrt{a + f} + \sqrt{a - e}}{\sqrt{e + f}}$. Das Dreieck CML ist $= \frac{1}{2}\, MC \cdot OL = \frac{r^2\,(f - e)\sqrt{(f + a)\,(a - e)}}{4a^2}$; folglich (wenn man zur Abkürzung die Zahl $\frac{\sqrt{a + f} + \sqrt{a - e}}{\sqrt{e + f}} = n$ setzt), der Unterschied beider, d. i. der Flächenraum CLK =
$\frac{r^2\,(f - e)}{4a^2}\left\{\sqrt{(a + f)\,(a - e)} - (f - e)\ log.\ nat.\ n\right\}$. Ganz wie bei der Ellipse folgt hieraus, daß die zwischen AG, AH und GEH liegende konische Fläche $AGEH = \frac{r}{a}\sqrt{ef}\left\{\sqrt{(a + f)\,(a - e)} - (f - e)\ log.\ nat.\ n\right\}$. Setzt man, wie bei der Ellipse, die Sehne, welche die Grundfläche des Hufes begrenzt, $GH = c = \frac{4r\sqrt{ef\,(a + f)\,(a - e)}}{a\,(e + f)}$, so erhält man noch:

$$\text{Fläche } AGEH = \tfrac{1}{4}\, c\,(e + f) - \frac{r}{a}\,(f - e)\sqrt{ef} \cdot log.\ nat.\ n.$$

Zieht man diese von der Fläche $AGBH = \frac{1}{2}ab$ ab, wo $b = \frac{\varphi}{90^0}\,\pi r$, $\cos\varphi = \frac{2\,ef - a\,(f - e)}{a\,(f + e)}$, so ergibt sich für den Mantel M des Kegelhufes der Ausdruck:

$$M = \tfrac{1}{2}\, ab - \tfrac{1}{4}\, c\,(f + e) + \frac{r}{a}\,(f - e)\sqrt{ef} \cdot log.\ nat.\ n.$$

Zusatz. Ist die Ebene der den Mantel begrenzenden Hyperbel der Achse des Kegels parallel oder senkrecht gegen dessen Grundfläche, so ist $f = e$, daher $\cos\varphi = \frac{e}{a}$, $c = \frac{2r}{a}\sqrt{a^2 - e^2}$, und der Ausdruck des Mantels reducirt sich auf $M = \frac{1}{2}\,(ab - ce)$.

8. **Aufgabe.** Den cubischen Inhalt des von einem Parabelsegmente begrenzten Kegelhufes zu finden.

Zur Lösung dieser Aufgabe kommt es darauf an, den Inhalt der beiden pyramidalen oder konischen Körper zu bestimmen, deren Spitze in A, der Kegelspitze, ist, und von welchen der eine das Kreissegment GBH, die Grundfläche des Hufes, der andere das Parabelsegment GEH, seine Seitenfläche, zur Basis hat. Der Inhalt des Kegelhufes $EGBH$ ist dann der Unterschied beider Körper.

Fig. 207.



Was den ersten derselben $AGBH$ anbelangt, so ist dessen Grundfläche GBH die Differenz zwischen dem Kreissector $CGBH$ und dem Dreiecke CGH: jener ist, nach den in (5) gebrauchten Bezeichnungen, $= \frac{1}{2}\,rb$, dieses $= \frac{cr(2e-a)}{2a}$, daher jene Grundfläche $GBH = \frac{1}{2}\,r\left(b + c - \frac{2ce}{a}\right)$, wo $\frac{2e}{a} - 1 = \cos\varphi$, $b = \frac{\varphi}{90^{\circ}}\pi r$, $c = \frac{4r}{a}\sqrt{e(a-e)}$. Da nun die Höhe des Körpers dieselbe wie die des Kegels ist, so ist dessen Inhalt $= \frac{1}{6}\,rh\left(b + c - \frac{2ce}{a}\right)$, wo $h = \sqrt{a^2 - r^2}$ diese Höhe bezeichnet.

Der zweite Körper $AGEH$ hat zur Grundfläche das Parabelsegment GEH. Da $GH = c$, $OE = EB = a - e$, so ist dieses Segment (4. b) $= \frac{2}{3} c (a - e)$; die Höhe des Körpers ist ein aus A auf OE gefälltes Perpendikel AP; da dasselbe sich zu einem aus D auf AB gefällten Perpendikel wie $AE : AD$ oder $e : a$ verhält, letzteres aber, wie man sofort aus dem Inhalte des Dreieckes ABD erkennt, $= \frac{2rh}{a}$, so ist $AP = \frac{2rhe}{a^2}$. Mit diesen Werthen der Höhe AP und der Grundfläche GEH ergibt sich der Inhalt des Körpers $AGEH = \frac{4}{9} \cdot \frac{cehr\,(a - e)}{a^2}$.

Da der hufförmige Abschnitt $EGBH$ die Differenz beider Körper ist, so erhält man für denselben, bezeichnet man seinen Inhalt mit H,

$$H = \frac{1}{3}\,hr \left\{ \frac{b + c}{2} - \frac{ce}{a} - \frac{4\,ce\,(a - e)}{3a^2} \right\},$$

oder nach der Reduction

$$H = \frac{1}{3}\,hr \left\{ \frac{b + c}{2} - \frac{ce}{3a} \left(7 - \frac{4e}{a} \right) \right\}.$$

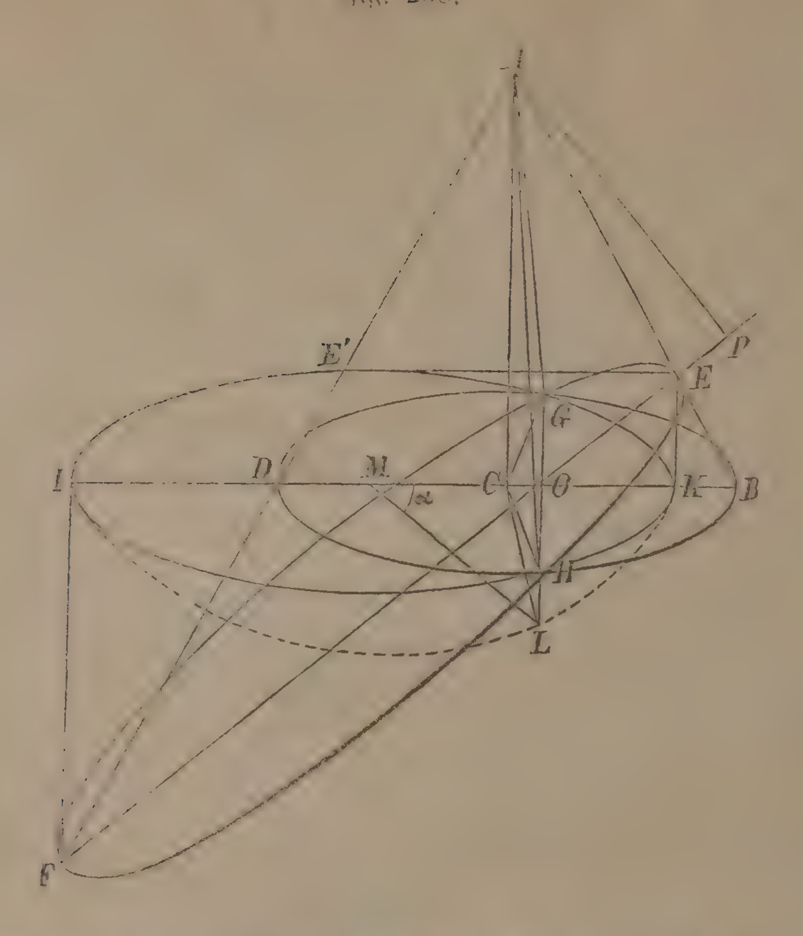
Zusatz. Ist die Grundfläche des Hufes ein Halbkreis, so ist

$$e = \frac{a}{2}, \quad b = \pi r, \quad c = 2r, \quad \text{daher } H = \tfrac{1}{3} hr^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

9. Aufgabe. Den cubischen Inhalt des von einem elliptischen Segmente begrenzten Kegelhufes zu finden. (Fig. 108.)

Die Grundfläche des Körpers $AGBH$, dessen Inhalt zunächst zu bestimmen ist, ergibt sich durch Abzug des Dreieckes CGH vom Kreissector $CGBH$. Das Dreieck CGH ist, nach den in (6) gebrauchten Bezeichnungen und dem dortigen Werthe von CO, gleich $\frac{cr\,(2ef - ea - fa)}{2\,a\,(f - e)}$, der Sector $CGBH = \frac{1}{2}\,br$, Bogen $b = \frac{\varphi}{90^0}\,\pi r$, $\cos\varphi = \frac{2\,ef - ea - fa}{a\,(f - e)}$, also das Kreissegment $GBH = \frac{r}{2} \left\{ b - \frac{c\,(2\,ef - ea - fa)}{a\,(f - e)} \right\}$.

Fig. 208.



Bezeichnet nun h die Höhe oder Achse des Kegels, so ist der Inhalt des Körpers $AGBH = \frac{rh}{6} \left\{ b - \frac{c\,(2ef - ea - fa)}{a\,(f - e)} \right\}$. Uebergehend zum Körper $AGEH$ erhält man aus dem in (6) entwickelten Werthe des Flächenraumes CLK und seinem Verhältnisse zu CHK den Sector $CGKH$; es ist nämlich $CGKH = \frac{r^2 \sqrt{ef}}{a^2} \left\{ \frac{\alpha\pi\,(e + f)}{360^\circ} - \sqrt{(f - a)\,(a - e)} \right\}$, wo α so, daß $\cos\alpha = \frac{e + f - 2a}{f - e}$, oder, da $\sqrt{ef\,(f - a)\,(a - e)} = \frac{ca\,(f - e)}{4r}$, dieser Sector $CGKH = \frac{r}{4a} \left\{ \frac{\alpha\pi}{90^\circ} \cdot \frac{r\,(f + e)}{a} \sqrt{ef} - c\,(f - e) \right\}$. Zieht man hiervon das Dreieck $CGH = \frac{cr(2ef - ae - af)}{2a\,(f - e)}$ ab, so bleibt der Inhalt des elliptischen Segmentes $GKH = \frac{r\,(e + f)}{4a} \cdot \left\{ \frac{\alpha\pi}{90^\circ} \cdot \frac{r\sqrt{ef}}{a} - \frac{c\,(f + e - 2a)}{f - e} \right\}$. Dieses Segment

verhält sich zum Segmente GEH, dessen Projection es ist, wie $IK : EF$, oder, wenn man $EF = d$ setzt, wie $r(e + f) : ad$, daher ist $GEH = \frac{d}{4}\left\{\frac{\alpha\pi}{90^0}\cdot\frac{r}{a}\sqrt{ef} - \frac{c(f + e - 2a)}{f - e}\right\}$. Dies ist die Grundfläche des Körpers $AGEH$, seine Höhe ist das aus A auf EF zu fällende Perpendikel AP. Da das Dreieck AEF sich zum Dreiecke ABD wie ef zu a^2 verhält, letzteres aber $= hr$, so ist das erstere $= \frac{efhr}{a^2}$, und daher $AP = \frac{2efhr}{a^2 d}$.

Hieraus folgt nun der Inhalt des Körpers $AGEH = \frac{1}{3} GEH \cdot AP$
$= \frac{efhr}{6a^2}\left\{\frac{\alpha\pi}{90^0}\cdot\frac{r}{a}\sqrt{ef} - \frac{c(f + e - 2a)}{f - e}\right\}$.

Da der hufförmige Abschnitt $EGBH$ die Differenz der beiden Körper $AGBH$ und $AGEH$ ist, so ist dieser Abschnitt (man bezeichne ihn kurz mit H)

$$H = \tfrac{1}{6}rh\left\{b + \frac{c\,[(a^2 + ef)(e + f) - 4aef]}{a^2(f - e)} - \frac{\alpha\pi}{90^0}\cdot\frac{efr}{a^3}\sqrt{ef}\right\}.$$

Zusatz. Ist die Grundfläche des Hufes ein Halbkreis, so muß $a(e + f) = 2ef$ sein. Es ist dann $\varphi = 90^0$, $b = \pi r$, $c = 2r$, $\cos\alpha = \frac{f - e}{f + e}$ oder $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{e}{f}}$, $H = \frac{1}{6}\pi r^2 h\left\{1 + \frac{f - e}{\pi a} - \frac{\alpha}{90^0} \cdot \frac{e + f}{2a^2}\sqrt{ef}\right\}$.

Ist die Grundfläche ein ganzer Kreis, also die des Kegels, so ist $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h\left\{1 - \left(\frac{e}{a}\right)^{3/2}\right\}$; der Ueberschuß des Kegels über den hufförmigen Abschnitt verhält sich zum ganzen Kegel wie $e\sqrt{e} : a\sqrt{a}$.

10. **Aufgabe. Den cubischen Inhalt des vom Segmente einer Hyperbel begrenzten Kegelhufes zu finden.**

Man hat nur f negativ zu nehmen und statt $\frac{\alpha\pi}{360^0} \cdots - \sqrt{-1} \cdot log.\,nat.\,n$ zu setzen, um aus den in (9) für die Ellipse gefundenen Ausdrücken die für die Hyperbel geltenden abzuleiten. Man findet so auf dem kürzesten Wege:

Körper $AGBH = \frac{rh}{6}\left\{b - \frac{c\,(2ef + ea - fa)}{a\,(f + e)}\right\}$,

Körper $AGEH = \frac{efhr}{6a^2}\left\{\frac{c\,(f - e + 2a)}{e + f} - \frac{4r\sqrt{ef}}{a}\,log.\,nat.\,n\right\}$,

die Differenz beider, d. i. der hufförmige Abschnitt $H =$

$$\tfrac{1}{2} rb \left\{ b + \frac{c\,[(a^2 - ef)(f - e) - 4aef]}{a^2 (f + e)} + \frac{4efr\sqrt{ef}}{a^2}\, log.\, nat.\, n \right\},$$

wo b, c und n die in 7 angegebenen Werthe haben.

Zusatz. Ist die Grundfläche des Hufes ein Halbkreis, mithin $2ef = a(f - e)$, so ist:

$$H = \tfrac{1}{2} r^2 b \left\{ 1 - \frac{e + f}{a} + \frac{2(f - e)\sqrt{ef}}{a^2}\, log.\, nat.\, n \right\}, \text{ wo}$$

$$n = \frac{\sqrt{f} + \sqrt{e}}{\sqrt{f} - \sqrt{e}}.$$

Anhang IX.

Sätze und Aufgaben über Maxima und Minima.

A. Das Parallelepiped.

1. Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped zu construiren, welches bei gegebener Höhe und gegebener Summe der Kanten den größten Inhalt hat.

Auflösung. Das Maximum des Inhaltes des Parallelepipedes hängt von dem Maximum des Inhaltes der Grundfläche ab. Da aber der Umfang der Grundfläche ein gegebener ist, so muß nach Plan. XII., *g*. für den Fall des Maximums der Grundfläche dieselbe ein Quadrat sein.

Zusatz. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche hat also unter allen Parallelepipeden von gleicher Höhe und derselben Kantensumme den größten Inhalt und umgekehrt hat ein rechtwinkeliges Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche unter allen Parallelepipeden von derselben Höhe und demselben Inhalte die kleinste Summe der Kanten.

2. Satz. Der Würfel hat unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von derselben Kantensumme den größten Inhalt und umgekehrt unter allen Parallelepipeden von demselben Inhalte hat der Würfel die kleinste Kantensumme.

Die Beweise stützen sich auf I.

3. Aufgabe. Dasjenige rechtwinkelige Parallelepiped von quadratischer Grundfläche zu finden, welches bei gegebener Summe der Höhe und einer Seite der Grundfläche den größten Inhalt hat.

Auflösung. Es heiße die Höhe des gesuchten Parallelepipedes z, die Seite der Grundfläche y; alsdann ist $y + z$ von gegebener Größe m. Denkt man sich ein Parallelepiped von doppelter Höhe und von derselben Grundfläche wie das gegebene, so ist die Summe dreier an einander stoßenden Kanten desselben $= 2z + y + y = 2z + 2y = 2m$. Die Aufgabe

ist, da von diesem Parallelepiped die Summe der Kanten bekannt ist und dasselbe zugleich mit dem gesuchten zu einem Maximum wird, auf den vorhergehenden Satz zurückgeführt. Es muß also $2z = y$ oder $z = \frac{1}{2}y$ sein. Es hat also dasjenige rechtwinkelige Parallelepiped von quadratischer Grundfläche, dessen Höhe die Hälfte der Seite der Grundfläche beträgt, den größten Inhalt.

1. Zusatz. Es wird also, wenn $y + z = m$, y^2z zu einem Maximum, wenn $z = \frac{1}{2}y$ ist.

2. Zusatz. Ist das rechtwinkelige Parallelepiped y^2z von gegebenem Inhalte, so wird $y + z$ zu einem Minimum, wenn $z = \frac{1}{2}y$ ist,

4. Aufgabe. **Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von derselben Höhe und derselben Summe der Kanten dasjenige zu finden, welches die kleinste Diagonale hat.**

Auflösung. Da das Quadrat der Diagonale des Parallelepipedes der Summe der Quadrate der Höhe und der Diagonale der Grundfläche gleich ist, so hängt das Minimum der Diagonale des Parallelepipedes vom Minimum der Diagonale der Grundfläche ab, deren Umfang bekannt ist. Aus Plan. XII., 29 oder auch aus der Formel $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ ergibt sich leicht, daß unter allen Rechtecken von gleichem Umfange das Quadrat die kleinste Diagonale hat. Die Grundfläche des rechtwinkeligen Parallelepipedes muß also ein Quadrat sein.

5. Satz. **Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von derselben Summe der Seitenkanten hat der Würfel die kleinste Diagonale.**

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 4.

1. Zusatz. Von allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleicher Diagonale hat der Würfel die größte Summe der Kanten.

2. Zusatz. Ist $x + y + z = s$, so erreicht $x^2 + y^2 + z^2$ ein Minimum, wenn $x = y = z = \frac{1}{3}s$.

3. Zusatz. Ist $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$, so ist $x + y + z$ ein Maximum, wenn $x = y = z$.

6. Aufgabe. **Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von derselben Höhe und gleicher Grundfläche dasjenige zu finden, welches die kleinste Diagonale hat.**

Auflösung. Die kleinste Diagonale des Parallelepipedes hängt ab von der kleinsten Diagonale der der Größe nach gegebenen Grundfläche.

Heißen die Seiten der der Größe nach gegebenen Grundfläche x und y, so läßt sich leicht nachweisen, daß $x^2 + y^2$ ein Minimum wird, wenn $x = y$. Denn da xy constant ist, so wird $x^2 + y^2$ ein Minimum, wenn $x^2 + y^2 + 2xy$ d. i. $(x + y)^2$ oder $x + y$ ein Minimum ist, wenn also $x = y$ ist. Es hat also bei gegebener Höhe und Grundfläche dasjenige rechtwinkelige Parallelepiped die kleinste Diagonale, dessen Grundfläche ein Quadrat ist.

7. Satz. **Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von demselben Inhalte hat der Würfel die kleinste Diagonale und unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleicher Diagonale hat der Würfel den größten Inhalt.**

Die Beweise stützen sich auf Satz 2 in Verbindung mit Satz 5.

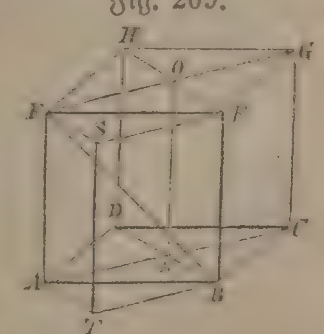
8. Satz. **Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von derselben Oberfläche hat der Würfel die kleinste Diagonale, und von allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von derselben Diagonale hat der Würfel die größte Oberfläche.**

Der Beweis stützt sich auf 7.

9. Aufgabe. **Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von quadratischer Grundfläche dasjenige zu finden, welches bei gegebener Diagonale einer Seitenfläche den größten Inhalt hat.**

Auflösung. Es sei $ABCDHGFE$ das verlangte Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche $ABCD$, dessen Diagonale EB von gegebener Größe $= d$ sei und dessen Inhalt ein Maximum sein soll. Zieht man die Diagonalen der beiden Grundflächen und verbindet man die Durchschnitte O und N derselben mit einander und ergänzt das dreiseitige Prisma $EOFBNA$ zu einem Parallelepiped $EOFSTBNA$, so ist die Grundfläche des letzteren ebenfalls ein Quadrat, dessen Inhalt der Hälfte der Grundfläche jenes ersten Quadrates gleich kommt. Der Inhalt des Parallelepipedes EB wird offenbar mit dem des gesuchten zugleich ein Maximum, und EB ist die Diagonale jenes ersten Parallelepipedes; nach Satz 6 muß also $ANBTSO$ ein Würfel sein. Hieraus ergibt sich, daß ein rechtwinkeliges Parallelepiped von quadratischer Grundfläche, worin die Diagonale einer Seitenebene eine gegebene Länge hat, dem Inhalte

Fig. 209.



nach am größten wird, wenn seine Höhe der halben Diagonale der Grundfläche gleich ist.

1. Zusatz. Heißt die Höhe y, die Seite der Grundfläche x, so ist $x : y = \sqrt{2} : 1$.

2. Zusatz. Heißt die Diagonale der Seitenfläche d, so ist $x^2 + y^2 = d^2$, also $x = d\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, $y = d\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

3. Zusatz. Aufgabe. Aus der gegebenen Diagonale einer Seitenfläche des größten Parallelepipedes x^2y soll die Seitenfläche xy construirt werden.

Auflösung. Man beschreibe über d als Durchmesser einen Kreis, theile d in 3 gleiche Theile und errichte in den Theilungspunkten auf d nach verschiedenen Seiten Perpendikel bis zur Peripherie des Kreises. Verbindet man nun die Durchschnittspunkte dieser Senkrechten und der Peripherie des Kreises mit den Endpunkten des Durchmessers, so ist das so entstehende Rechteck das verlangte; die größere Seite ist die Seite der quadratischen Grundfläche, die kleinere die Höhe des Parallelepipedes.

Anwendung. Durch obige geometrische Lösung ist zugleich die algebraische Aufgabe gelöst, für x und y diejenigen Werthe zu bestimmen, für welche x^2y zu einem Maximum wird, wenn $x^2 + y^2 = d^2$*). Man vergleiche mit der geometrischen Lösung die rein algebraische in „Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, §. 108, Beispiel 22".

Die Auflösung ergibt sich auch gleich aus Zusatz 1 in (3), wenn man x^2 statt des dortigen y, y^2 statt z setzt.

10. Satz. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleichem Inhalte und gleicher Höhe hat dasjenige, dessen Grundfläche ein Quadrat ist, die kleinste Oberfläche.

Der Beweis stützt sich auf Planim. XII., *g*.

11. Satz. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gleichem Inhalte hat der Würfel die kleinste Oberfläche und unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Würfel den größten Inhalt.

Der Beweis stützt sich auf S. 10.

*) Bekanntlich kommt diese Aufgabe in Anwendung, wenn gefordert wird, die Dimensionen eines rechtwinkeligen Balkens anzugeben, welcher aus einem cylindrischen Baumstamme ausgehauen werden soll, der die größte Stärke besitzt.

12. Aufgabe. Es soll ein rechtwinkeliges Parallelepiped construirt werden, für welches bei gegebenem Inhalte die Summe aus einer Grundfläche und den vier Seitenflächen ein Minimum wird.

Auflösung. Man denke sich das zu suchende oben offene Parallelepiped doppelt, indem man jede der Seitenkanten um sich selbst verlängert und die Endpunkte der verlängerten Seiten mit einander verbindet. Da dieses neue Parallelepiped zur Summe der sechs Seitenflächen das Doppelte der Summe der fünf Seitenflächen des gesuchten hat, so ist die Aufgabe auf Satz 11 zurückgeführt. Das gesuchte Parallelepiped hat demnach die kleinste Oberfläche, wenn seine Grundfläche ein Quadrat und die Höhe die Hälfte der Seite dieses Quadrates ist.

Zusatz. Ist $x^2 + 4xy = O$, so erreicht x^2y ein Maximum, wenn $y = \frac{1}{2} x$ ist.

13. Aufgabe. Von einem rechtwinkeligen Parallelepiped von quadratischer Grundfläche ist die Summe der Grundfläche und einer Seitenfläche von gegebener Größe S, die Eigenschaften desjenigen Parallelepipedes zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Man denke sich ein Parallelepiped von derselben quadratischen Grundfläche, wie das gesuchte, und von der halben Höhe, alsdann ist die Summe der sämmtlichen Seitenflächen dieses Parallelepipedes eine gegebene, nämlich $= 2S$. Die Aufgabe ist demnach auf Satz 11 zurückgeführt. Das gesuchte Parallelepiped muß also eine Höhe besitzen, welche der **doppelten** Seite der Grundfläche gleich ist.

1. Zusatz. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von gegebenem Inhalte und von quadratischer Grundfläche hat dasjenige, dessen Höhe das Doppelte der Seite der Grundfläche beträgt, die kleinste Summe der Grundfläche und einer anstoßenden Seitenfläche.

2. Zusatz. Ist $x(x + y) = O$, so wird x^2y ein Maximum, wenn $y = 2x$ ist.

3. Zusatz. Ist $x^2y = P$, so ist $x(x + y)$ ein Minimum, wenn $y = 2x$ ist.

14. Aufgabe. Von einem rechtwinkeligen Parallelepiped von quadratischer Grundfläche ist die Summe S der Grundfläche und einer der auf derselben senkrecht stehenden Diagonalebenen gegeben, die Eigenschaften desjenigen Parallelepipedes zu finden, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Es sei *EOFSTBNA* (Fig. 209) das verlangte Parallelepiped. Man denke sich ein Parallelepiped *EFABCGHD* mit quadratischer Grundfläche, welches dieselbe Höhe mit dem gesuchten hat und dessen Seitenfläche *EFBA* mit der Diagonalebene *EFBA* des gesuchten Parallelepipedes zusammenfällt. Die Grundfläche *ABCD* dieses zweiten Parallelepipedes wird offenbar das Doppelte der Grundfläche des gesuchten Parallelepipedes sein, und es wird die Summe sämmtlicher Seitenflächen des zweiten Parallelepipedes $= 4\ S$ sein. Bei dem Maximum des Inhaltes des zweiten Parallelepipedes muß dasselbe nach 11 ein Würfel sein. Hieraus ergibt sich also, daß die Höhe des gesuchten Parallelepipedes der Diagonale seiner Grundfläche gleich sein muß, oder daß die senkrechte Diagonalebene ein Quadrat sein muß.

1. Zusatz. Unter allen rechtwinkeligen Parallelepipeden von quadratischer Grundfläche und gleichem Inhalte hat dasjenige, dessen Höhe der Diagonale der Grundfläche gleich ist, die kleinste Summe der Grundfläche und der auf derselben senkrecht stehenden Diagonalebene.

2. Zusatz. Ist $x^2 + yx\sqrt{2} = S$, so wird x^2y zu einem Maximum, wenn $y = x\sqrt{2}$ ist.

3. Zusatz. Ist $x^2y = P$, so wird $x^2 + yx\sqrt{2}$ zu einem Minimum, wenn $y = x\sqrt{2}$ ist.

15. Satz. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped von quadratischer Grundfläche, dessen beide Grundflächen und eine auf ihnen senkrecht stehende Diagonalebene eine gegebene Summe haben, hat ein Maximum des Inhaltes, wenn die Höhe der doppelten Diagonale der Grundfläche gleich ist.

Der Beweis des Satzes stützt sich, wenn ein zweites Parallelepiped in gleicher Weise wie in 14 construirt wird, auf Satz 13.

1. Zusatz. In einem rechtwinkeligen Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche und gegebenem Inhalte ist die Summe der beiden Grundflächen und einer der auf ihnen senkrecht stehenden Diagonalebenen ein Minimum, wenn die Höhe der doppelten Diagonale der Grundfläche gleich ist.

2. Zusatz. Ist $2x^2 + xy\sqrt{2} = S$, so wird x^2y ein Maximum, wenn $y = 2x\sqrt{2}$.

3. Zusatz. Ist $x^2y = P$, so wird $2x^2 + xy\sqrt{2}$ ein Minimum, wenn $y = 2x\sqrt{2}$.

16. Satz. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped von quadratischer Grundfläche, bei welchem die Summe einer Grundfläche und der beiden auf ihr senkrecht stehenden Diagonalebenen gegeben und $= S$ ist, hat den größten Inhalt, wenn die Höhe der halben Diagonale der Grundfläche gleich ist.

Der Beweis stützt sich auf Satz 12.

1. Zusatz. In einem rechtwinkeligen Parallelepiped von quadratischer Grundfläche und gegebenem Inhalte ist die Summe der beiden auf der Grundfläche senkrecht stehenden Diagonalebenen und einer Grundfläche ein Minimum, wenn die Höhe der halben Diagonale der Grundfläche gleich ist.

2. Zusatz. Ist $x^2 + 2xy\sqrt{2} = S$, so wird x^2y ein Maximum, wenn $y = x\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

3. Zusatz. Ist $x^2y = P$, so wird $x^2 + 2xy\sqrt{2}$ ein Minimum, wenn $y = x\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

Bemerkung. Die Lösung der Aufgaben über die schräg gegen die Grundfläche stehende Diagonalebene bietet an dieser Stelle einige Schwierigkeiten dar. Es finden die betreffenden Aufgaben später in Nr. 33, Zus. und 39, Zus. 3 ihre Erledigung.

17. Aufgabe. Ein Parallelepiped mit gegebener Körperecke und gegebener Kantensumme zu construiren, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Heißen die an eine gleiche Körperecke zweier Parallelepipeden von derselben Kantensumme stoßenden Kanten x, y, z und x', y', z', heißen ferner die von x und y und x' und y' eingeschlossenen Grundflächen G und G', ihre zugehörigen Höhen h und h', so ist sowohl $G : G' = xy : x'y'$ als auch $h : h' = z : z'$. Es stehen somit die Inhalte der Parallelepipeden in dem Verhältnisse von $xyz : x'y'z'$. Das Maximum des Parallelepipedes von gegebener Kantensumme hängt also von dem Maximum von xyz ab, und dieses findet nach 2 Statt, wenn $x = y = z$. Von allen Parallelepipeden mit gegebener Kantensumme und gegebenen Körperwinkeln hat also das gleichkantige den größten Inhalt und umgekehrt unter allen Parallelepipeden von demselben Inhalte hat das gleichkantige die kleinste Kantensumme.

B. Das Prisma und der Cylinder.

18. Satz. Unter allen Prismen von derselben Grundfläche und von gleichem Inhalte hat das senkrechte die kleinste Oberfläche.

Der Beweis leicht.

Zusatz. Unter allen Parallelepipeden von gleicher Oberfläche hat der Würfel den größten Inhalt, und unter allen, die gleichen Inhalt haben, hat der Würfel die kleinste Oberfläche (11).

19. Satz. Unter allen senkrechten n-seitigen Prismen von gleich großer Grundfläche und gleichem Inhalte hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grundfläche ein reguläres n-Eck ist.

Der Beweis stützt sich auf Planim. XII., 19.

Zusatz. Unter allen senkrechten n-seitigen Prismen von gleicher Oberfläche und gleicher Höhe hat dasjenige, dessen Grundfläche ein reguläres n-Eck ist, den größten Inhalt.

20. Aufgabe. Die Grundfläche eines Parallelepipedes ist ihrer Gestalt und Größe nach gegeben, die Seitenflächen aber sind es bloß der Größe nach: man soll dasjenige Parallelepiped finden, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Aus der Voraussetzung ergibt sich, daß die Höhen der Seitenflächen bekannt sind. Sind diese Höhen nun gleich, so muß man sie senkrecht auf die Grundfläche stellen; sind sie aber ungleich, so ist die kleinste von diesen Höhen die größte, welche der Körper erhalten kann. In diesem Falle müssen also die Seitenflächen, welche die kleinste Höhe haben, auf der Grundfläche senkrecht stehen.

21. Aufgabe. Die rechtwinkelige Grundfläche und die Seitenflächen eines Parallelepipedes sind der Größe nach gegeben: man soll die Bedingungen angeben, unter welchen der Körper seinem Inhalte nach ein Maximum wird.

Auflösung. Die Grundfläche habe den Inhalt p, eine der Seitenflächen den Inhalt p', die andere p'', die an die Grundfläche stoßenden Grundlinien derselben seien x und y, die zugehörigen Höhen h' und h'', alsdann ist $xy = p$, $xh' = p'$ und $yh'' = p''$. Soll das Parallelepiped den größten Inhalt für die gegebenen Stücke haben, so müssen nach den Betrachtungen in der vorhergehenden Aufgabe die beiden Höhen h' und h'' einander gleich und das Parallelepiped ein rechtwinkeliges sein. Es hat also unter allen Parallelepipeden, deren Seitenflächen und deren Grundfläche ihrer Größe nach gegeben sind, das rechtwinkelige den größten

Inhalt. Die x und y lassen sich leicht bestimmen, es ist nämlich $p' : p'' = x : y = xy : y^2 = p : y^2$, eben so:

$$p'' : p' = p : x^2.$$

1. Zusatz. Es ist $x = \sqrt{\frac{pp'}{p''}}$, $y = \sqrt{\frac{pp''}{p'}}$, $h = \sqrt{\frac{p'p''}{p}}$.

2. Zusatz. Der Inhalt des Parallelepipedes von der verlangten Eigenschaft ist $= \sqrt{pp'p''}$.

22. Aufgabe. **Unter allen Parallelepipeden von gleichem cubischen Inhalte, welche einen gegebenen körperlichen Winkel und eine gegebene Kante haben, dasjenige zu finden, welches die kleinste Oberfläche hat.**

Auflösung. Es heiße die gegebene Kante des Parallelepipedes a, die beiden anderen Kanten seien x und y, die zwischen a und x liegende Seitenfläche heiße P, die zwischen a und y liegende P' und die zwischen x und y liegende endlich P''. Die von den Endpunkten der x und y auf a gefällten Perpendikel heißen h und h'. Da die von dem Endpunkte der gegebenen Kante a auf die gegenüberstehende Seitenfläche gefällte Senkrechte sowohl, als der Inhalt constant sind, so muß P'' constant sein, es wird also auch in Folge von Planim. V., 81 das Rechteck xy constant sein. Da ferner x mit h und y mit h' in einem constanten, von der Größe der Winkel der gegebenen Ecke abhängigen Verhältnisse stehen, so muß auch das Rechteck hh' ein constantes sein. Das Minimum der Oberfläche des gesuchten Parallelepipedes $2\ P + 2\ P' + 2\ P''$ ist, da P'' constant ist, abhängig von dem Minimum $P + P' = ah + ah' = a\ (h + h')$, somit von dem Minimum der Summe $h + h'$. Da hh' constant ist, so findet das Minimum von $h + h'$ für $h = h'$ Statt. (Plan. XII., g.) Es ist also auch $P = P'$. Es ergibt sich also hieraus der Satz: Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte, welche einen gleichen körperlichen Winkel und eine gleiche Kante haben, hat dasjenige die kleinste Oberfläche, in welchem die beiden Seitenflächen, worin die gleiche Kante liegt, gleich groß sind.

23. Satz. **Unter allen Parallelepipeden von gleichem Inhalte und einem gleichen körperlichen Winkel hat dasjenige die kleinste Oberfläche, dessen Grenzflächen alle einander gleich sind.**

Der Beweis stützt sich auf 22.

1. Zusatz. Unter allen Parallelepipeden von einer gleichen körperlichen Ecke und gegebenen Oberfläche hat dasjenige den größten Inhalt, dessen Grundflächen oder auch dessen drei Höhen einander gleich sind.

2. Zusatz. Aufgabe. Die Oberfläche eines Parallelepipedes mit gegebener Körperecke sei bekannt, man soll dasjenige Parallelepiped construiren, welches den größten Inhalt hat.

Anleitung. Man construire zuerst ein Parallelepiped, welches drei gleiche Höhen und die gegebene körperliche Ecke hat u. s. w.

24. Satz. Unter allen senkrechten dreiseitigen Prismen, von welchen die Höhe, der Inhalt der Grundfläche und die Neigung zweier Seitenflächen gegeben sind, hat dasjenige die kleinste Summe dieser Seitenflächen, die kleinste dritte Seitenfläche und die kleinste Gesammtoberfläche, in welchem die Grundfläche gleichschenkelig ist.

Der Beweis stützt sich auf den leicht zu beweisenden planimetrischen Satz, daß von allen Dreiecken, welche gleichen Inhalt und gleichen Winkel an der Spitze haben, das gleichschenkelige den kleinsten Umfang und die kleinste Grundlinie hat.

25. Aufgabe. Von einem senkrechten dreiseitigen Prisma, dessen Grundfläche der Art nach gegeben ist, sei die Summe der beiden Grundflächen und einer daran stoßenden Seitenfläche gegeben: man soll die Eigenschaften desjenigen Prismas finden, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Die Seiten der Seitenflächen seien y und z und zwar sei y die Seitenkante, also auch Höhe des Prismas, und z Seite der Grundfläche. Die zu z gehörige Höhe der dreieckigen Grundfläche sei x. Die Summe der Seitenfläche und der beiden Grundflächen ist $yz + xz = (x + y)\,z$. Da $(x + y)\,z : (x + y)\,x = z : x$, und da das Verhältniß der Grundlinie der der Art nach bekannten dreieckigen Grundfläche zu ihrer Höhe ein constantes ist, und $(x + y)\,z$ constant ist, so muß auch $(x + y)\,x$ constant sein.

Der Inhalt des Prismas $\frac{1}{2}xyz$ steht zu x^2y in dem constanten Verhältnisse $z : 2x$; soll also der Inhalt des Prismas ein Maximum werden, so muß auch x^2y ein Maximum werden. Die Aufgabe ist demnach auf Aufgabe 13, Zusatz 2 zurückgeführt. Für den Fall des Maximums muß also $y = 2x$ sein, d. h. die Höhe des Prismas muß doppelt so groß sein

als diejenige Höhe der dreieckigen Grundfläche, welche auf der Seitenfläche des Prismas senkrecht steht.

26. **Aufgabe.** **Die Oberfläche eines senkrechten oder geraden regulären n seitigen Prismas sei gegeben: es soll dasjenige Prisma angegeben werden, dessen Inhalt ein Maximum ist.**

Auflösung. Man denke sich das gesuchte Prisma in n dreiseitige Prismen zerlegt, die alle zur gemeinschaftlichen Kante diejenige Linie haben, welche die Mitten der beiden Grundflächen miteinander verbindet. Die Aufgabe wird hierdurch auf die vorhergehende zurückgeführt. Es hat also dasjenige Prisma ein Maximum des Inhaltes, dessen Höhe der doppelten Apotheme der Grundfläche oder, was dasselbe ist, dem Durchmesser des der regulären Grundfläche eingeschriebenen Kreises gleich ist.

1. Zusatz. Unter allen regulären n-seitigen Prismen von gleichem Inhalte hat dasjenige, dessen Höhe dem Durchmesser des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises gleich ist, die kleinste Oberfläche.

2. Zusatz. Der obige Satz gilt auch, wenn die Grundfläche des Prismas zwar nicht regulär, aber doch so ist, daß sich derselben ein Kreis einschreiben läßt, und wenn dieselbe der Art nach gegeben ist.

3. Zusatz. Ein reguläres n seitiges Prisma hat bei gegebener Summe der Seitenflächen und einer Grundfläche ein Maximum des Inhaltes, wenn die Höhe desselben dem Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises gleich ist.

Zum Beweise denke man sich das Prisma doppelt u. s. w.

4. Zusatz. Unter allen n seitigen Prismen von gleicher Oberfläche hat dasjenige, dessen Grundfläche ein reguläres n-Eck und dessen Höhe dem Durchmesser des jenem n-Ecke eingeschriebenen Kreises gleich ist, den größten Inhalt.

27. **Satz.** **Die Oberfläche eines Cylinders ist immer kleiner als die Oberfläche eines Prismas von gleicher Höhe und gleichem cubischen Inhalte.**

Der Beweis stützt sich auf Plan. XII., 24.

28. **Satz.** **Unter allen Cylindern von gleicher Oberfläche hat derjenige, dessen Höhe dem Durchmesser der Basis gleich ist, den größten Inhalt, und**

von allen Cylindern von gleichem Inhalte hat derjenige, dessen Höhe dem Durchmesser der Basis gleich ist, die kleinste Oberfläche.

Die Beweise stützen sich auf Satz 26.

Ein zweiter Beweis ergibt sich durch folgende Betrachtung: Man denke sich den Cylinder von einem rechtwinkeligen Parallelepiped von derselben Höhe so umgeben, daß die Seiten der Grundfläche dieses den Umfang der Grundfläche jenes berühren. Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß Oberfläche und Inhalt des Cylinders mit Oberfläche und Inhalt des umgeschriebenen Parallelepipedes in gleichem Verhältnisse stehen, und zwar im Verhältnisse der Grundflächen beider Körper. Soll nun die Oberfläche des Cylinders eine constante sein, so muß auch die Oberfläche des ihm umgeschriebenen Parallelepipedes eine constante sein, und soll der Inhalt des Cylinders ein Maximum sein, so muß auch der des umgeschriebenen Parallelepipedes ein Maximum sein. Das dem Cylinder umgeschriebene Parallelepiped muß also nach S. 11 ein Würfel sein, somit ist die Höhe des größten Cylinders der Seitenkante des Würfels oder dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich.

Zusatz. Der Inhalt eines oben offenen Cylinders ist bei gegebener Oberfläche ein Maximum, wenn die Höhe dem Radius der Grundfläche gleichkommt.

29. Aufgabe. **Ein Tetraeder zu construiren, welches bei gegebener körperlicher Ecke an der Spitze und gegebener Summe der Seitenkanten dieser Ecke den größten körperlichen Inhalt hat.**

Auflösung. Denkt man sich an der gegebenen körperlichen Ecke ein Parallelepiped construirt, dessen drei an diese Ecke stoßende Kanten den Seitenkanten des Tetraeders gleich sind, so ist die Summe sämmtlicher Kanten des Parallelepipedes dem Vierfachen der gegebenen Summe der Seitenkanten des Tetraeders gleich, der Inhalt des Parallelepipedes ist dem 6fachen des Inhaltes des Tetraeders gleich. Die Aufgabe ist demnach auf 17 zurückgeführt.

30. Aufgabe. **Ein Tetraeder mit gegebener körperlicher Ecke an der Spitze zu construiren, welches bei gegebener Summe der Seitenflächen ein Maximum des Inhaltes hat.**

Auflösung. Construirt man in derselben Weise, wie in 29 ein Parallelepiped, so wird die Aufgabe auf 23, Zus. zurückgeführt.

C. Die Pyramide und der Kegel.

31. **Aufgabe.** **Unter allen Pyramiden auf derselben regulären Grundfläche und von derselben Höhe diejenige zu finden, welche die kleinste Oberfläche hat.**

Auflösung. Denkt man sich die Spitze der Pyramide, deren Oberfläche ein Minimum ist, auf die Grundfläche projicirt, dann sowohl von der Spitze, als ihrer Projection Senkrechte auf jede der Seiten der Grundfläche gefällt, wobei diese Senkrechten jede der Seiten in demselben Punkte treffen (I., 26), so hängt das Minimum der Seitenfläche, also auch der Gesammtoberfläche der Pyramide offenbar von dem Minimum der Summe der von der Spitze der Pyramide auf die Seiten gefällten Perpendikel ab. Nach Planim. VII., 104 bilden die von der Projection der Spitze der Pyramide auf die Seiten gefällten Perpendikel eine constante Summe S, die dem n-fachen der Apotheme des regulären n-Eckes der Grundfläche gleich ist. Es sei $ABDC$ ein Rechteck, dessen Höhe AC der Höhe der Pyramide und dessen Grundlinie AB der constanten Summe S gleich sei; es seien ferner $AE = CE'$, $EF = E'F'$, $FG = F'G'$ u. s. w. die einzelnen von der Projection der Spitze auf die Seiten gefällten Perpendikel, die gebrochene Linie $AE'FG'HJ'KD$ aber ist die Summe jener Perpendikel, welche für den Fall des Minimums der Seitenfläche ein Minimum sein muß. Soll aber diese gebrochene Linie ein Minimum sein, so muß nach Planim. XII., 10 jedes der Dreiecke $AE'F$, $E'FG'$, $FG'H$ u. s. w. gleichschenkelig sein, es muß also auch $AE = EF = FG$ u. s. w. sein, d. h. die Projection der Spitze der Pyramide muß in den Mittelpunkt der regulären Grundfläche fallen, die Pyramide muß also eine reguläre (III., 3) sein.

Fig. 210.

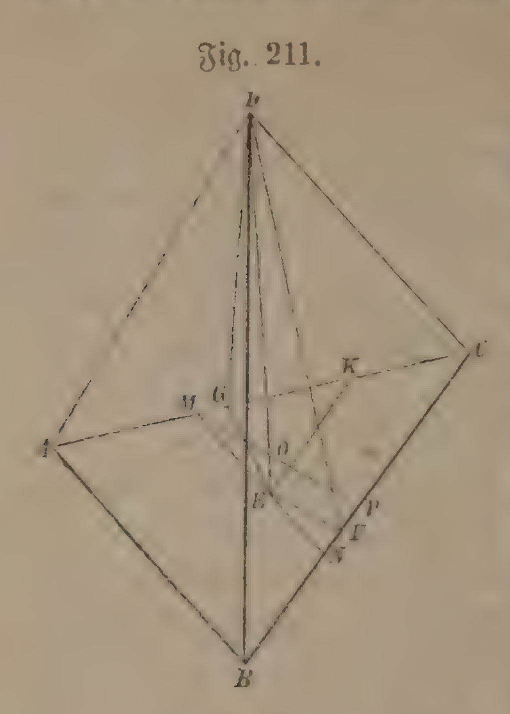
32. **Satz.** **Unter allen Kegeln von gleicher Höhe und gleicher Grundfläche hat der senkrechte Kegel die kleinste Oberfläche.**

Der Beweis ist auf 31 zu stützen.

33. **Aufgabe.** **Unter allen dreiseitigen Pyramiden auf einer der Gestalt und Größe nach gegebenen Grundfläche, welche eine gegebene Höhe und eine**

bloß der Größe nach gegebene Seitenfläche haben, diejenigen zu finden, für welche die Summe der beiden anderen Seitenflächen ein Minimum ist.

Fig. 211.



Auflösung. ABC sei die der Gestalt und Größe nach gegebene Grundfläche der dreiseitigen Pyramide, D die Spitze, DE das Höhenperpendikel; die Seitenfläche ADB der Pyramide ist der Größe nach gegeben, folglich ist auch das von D auf AB gefällte Perpendikel DH bekannt und somit liegt der Fußpunkt E auf einer der Lage nach bekannten Linie MN, welche parallel mit der Grundlinie AB gezogen ist. Man fälle von E auf BC und AC die Perpendikel EF und EG und ziehe DF und DG; DF wird alsdann auf BC und DG auf AC senkrecht stehen.

Es sei $BC = a$, $AC = b$, $DE = h$, ferner sei

$EF = x$, $EG = y$, $DF = t$, $DG = u$,

das Minimum der Summe der beiden Seitenflächen DAC und DBC hängt von dem Minimum der Summe $ta + ub$ ab.

Es heiße v die vierte Proportionale zu a, b und u, so daß $bu = va$; es ist also $ta + ub = ta + va = (t + v)\,a$. Das Minimum der Größe $ta + ub$ hängt somit von dem Minimum von $t + v$ ab.

Es sei ferner die vierte Proportionale zu a, b und h mit p, die zu a, b und y mit z bezeichnet, alsdann ist:

$$h^2 : p^2 = a^2 : b^2 = y^2 : z^2, \text{ also}$$
$$h^2 + y^2 : p^2 + z^2 = a^2 : b^2 = u^2 : v^2.$$

Es ist nun $t^2 : u^2 = h^2 + x^2 : h^2 + y^2$

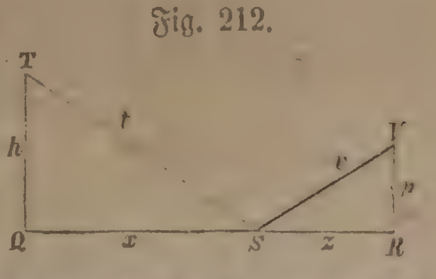
$$u^2 : v^2 = h^2 + y^2 : p^2 + z^2, \text{ folglich}$$
$$t^2 : v^2 = h^2 + x^2 : p^2 + z^2;$$
$$t^2 = h^2 + x^2, \text{ also auch } v^2 = p^2 + z^2.$$

Man ziehe durch E mit BC eine Parallele EK, durch M mit EF eine Parallele, welche EK in O, NC in P schneidet, alsdann ist

$$EG : OM = EK : MK = BC : AC \text{ d. i.}$$
$$y : OM = a : b, \text{ es ist also } OM = z \text{ und } x + z = MP$$

also constant. Macht man die Linie $QR = x + z = MP$, $QS = x$, $RS = z$, errichtet auf QR in Q und R die Senkrechten $QT = h$ und $RV = p$, verbindet S mit T und V, so ist $t = ST$, $v = SV$. Soll nun $t + v$ ein Minimum werden, so muß $\sphericalangle TSQ = \sphericalangle VSR$ (Plan. XII., 1) sein; es ist also, da $\triangle QST \sim \triangle RSV$ ist:

Fig. 212.



$$x : z = h : p.$$ Da aber $h : p = a : b = y : z$, so ist auch:
$$x : z = y : z, \text{ folglich:}$$
$$x = y, \text{ mithin auch:}$$
$$t = u, \quad \sphericalangle DFE = DGE.$$

Die Summe der beiden Seitenflächen ist somit ein Minimum, wenn ihre Höhen einander gleich sind, oder wenn dieselben gleiche Neigung gegen die Basis haben, oder wenn die Projectionen der Höhen der Seitenflächen gleich sind, oder endlich, wenn die körperliche Ecke, welche die Seitenflächen mit der Grundfläche bilden, eine gleichschenkelige ist.

34. Aufgabe. Unter allen dreiseitigen Pyramiden von gleicher Höhe und auf einer der Größe nach gegebenen Grundfläche diejenige zu finden, welche die kleinste Summe der Seitenflächen hat.

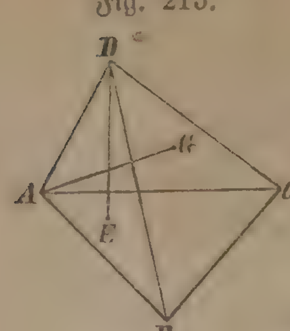
Auflösung. Man errichte in dem Mittelpunkte des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises eine Senkrechte auf der Grundfläche gleich der gegebenen Höhe. Der Endpunkt der Senkrechten wird die Spitze der verlangten Pyramide sein.

Der Beweis stützt sich auf 33.

Zusatz. Die Neigungswinkel sämmtlicher Seitenflächen gegen die Grundfläche sind einander gleich.

35. Aufgabe. Von einer dreiseitigen Pyramide seien bekannt 1) zwei Seitenflächen der Größe nach, 2) die beiden Seitenflächen gemeinschaftliche Kante, 3) die Höhe der Pyramide für eine dieser Seitenflächen als Grundfläche. Es soll diejenige Pyramide gefunden werden, bei welcher die Summe der beiden anderen Seitenflächen oder, was dasselbe ist, deren Oberfläche ein Minimum ist.

Fig. 213.



Auflösung. Es sei $ABCD$ die verlangte Pyramide, die Seitenflächen ABC und BDC seien der Größe nach gegeben, außerdem sei die Kante BC und die Höhe DE von D auf ABC bekannt. Man ziehe von A auf DBC die Höhe AG, alsdann wird AG der Größe nach bekannt sein, wie sich aus $ABC \cdot DE$ und $BDC \cdot AG$ für den dreifachen Inhalt der Pyramide ergibt.

Nach dem Satze in 33 muß aber, wenn $ADB + ADC$ ein Minimum sein soll, sowohl mit Rücksicht auf die Grundfläche ABC und die Höhe DE, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC$, als auch mit Rücksicht auf die Grundfläche DBC und die Höhe AG, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC$ sein. Es ist also $\triangle ADB \cong \triangle ADC$, $AB = AC$, $DB = DC$. Hieraus folgt also der Satz, daß die der Größe nach gegebenen Seitenflächen der Pyramide gleichschenkelig sein müssen*).

36. **Satz. Unter allen dreiseitigen Pyramiden von gleicher Höhe und gleich großer Grundfläche hat diejenige, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Mittelpunkt die Projection der Spitze ist, die kleinste Oberfläche.**

Der Beweis stützt sich auf den vorhergehenden Satz.

37. **Satz. Unter allen gleich großen Tetraedern hat das reguläre Tetraeder die kleinste Oberfläche.**

Der Beweis stützt sich auf 36.

1. **Zusatz.** Unter allen Tetraedern von gleicher Oberfläche hat das reguläre den größten Inhalt.

2. **Zusatz.** Eine reguläre dreiseitige Pyramide habe zum Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises x, zur Höhe y, zur Höhe der Seitenflächen z. Für den Fall des Maximums des Inhaltes bei gegebener Oberfläche ist

$$1)\quad y = 2x\sqrt{2},$$
$$2)\quad z = 3x.$$

---

*) Man vergleiche diesen Beweis mit dem weitläufigen in „Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben", 2. Thl., S. 286, enthaltenen, in dem unter anderen trigonometrische Hülfsmittel gebraucht werden.

Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich aus der in III., 41 bewiesenen Eigenschaft des regulären Tetraeders $ABCD$ (Fig. 77),

$$DO^2 = 2AO^2,\ \ DO = y,\ \ AO = 2x,\ \ y^2 = 8x^2,$$
$$y = 2x\sqrt{2},\ \ z^2 = y^2 + x^2 = 9x^2,\ \ z = 3x.$$

3. Zusatz. Aufgabe. Das Verhältniß von x zu y anzugeben, wenn x^2y ein Maximum und $x^2 + xz$ einer gegebenen Constanten gleich, z^2 aber $= x^2 + y^2$ sein soll, oder was dasselbe ist, wenn $x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}$ einer gegebenen Constanten gleich werden soll. — Gibt man x und y die in Zusatz 2 angegebenen Bedeutungen, so ist der Inhalt der Grundfläche der regulären dreiseitigen Pyramide $= 3x^2\sqrt{3}$ (Plan. VI., 10. Zus. 3), der Inhalt der Pyramide ist also $x^2y\sqrt{3}$. Der Inhalt jeder Seitenfläche ist $x\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, die Gesammtoberfläche der Pyramide ist $3\sqrt{3}\,(x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2})$.

Ist die Oberfläche der regulären Pyramide constant, so ist auch $x^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}$ constant, und ist der Inhalt der Pyramide ein Maximum, so ist auch x^2y ein Maximum. Die gegebenen Bedingungen werden also erfüllt, wenn

$$y = 2\sqrt{2}x; \qquad z = 3x.$$

Ist also bei einem rechtwinkeligen Parallelepipede von quadratischer Grundfläche x^2 und der Höhe y die Summe dieser Grundfläche und der durch eine Seite der Grundfläche gehenden Diagonalebene $x\sqrt{x^2 + y^2}$ bekannt, so ist dieses Parallelepiped ein Maximum, wenn die Höhe desselben der doppelten Diagonale der Grundfläche gleich ist.

38. Aufgabe. Von allen regulären n-seitigen Pyramiden von derselben Oberfläche diejenige zu bestimmen, welche den größten Inhalt hat.

Auflösung. Es seien die Radien der den Grundflächen zweier regulären n-seitigen Pyramiden eingeschriebenen Kreise x und x_1, die Umfänge u und u_1, die Höhen der Pyramiden seien y und y_1, die Höhen der Seitenflächen z und z_1, die Oberflächen O und O_1, die Inhalte J und J_1, alsdann ist:

$$O : O_1 = (\tfrac{1}{2}\,ux + \tfrac{1}{2}\,uz) : (\tfrac{1}{2}\,u_1x_1 + \tfrac{1}{2}\,u_1z_1) = u\,(x + z) : u_1\,(x_1 + z_1).$$

Da aber $u : u_1 = x : x_1$, so ist auch:

$$O : O_1 = x\,(x + z) : x_1\,(x_1 + z_1).$$

Für alle Pyramiden von gleicher Oberfläche bleibt also $x\,(x + z)$ oder $x^2 + xz$ constant.

Es ist ferner: $J : J_1 = \frac{1}{2}\,uxy : \frac{1}{2}\,u_1x_1y_1 = x^2y : x_1^2y_1$.

Der Inhalt J wird also ein Maximum, wenn $x^2 y$ ein Maximum wird. **Diese Bedingungen werden aber nach 37, Zus. 3 erfüllt, wenn:**

$$y = 2\sqrt{2}\, x, \quad z = 3x.$$

Es hat also unter allen regulären n-seitigen Pyramiden von derselben Oberfläche diejenige den größten Inhalt, bei welcher die Höhe der Seitenfläche dem dreifachen Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises gleich ist. Dieselbe Pyramide hat die Eigenschaft, bei gegebenem Inhalte die kleinste Oberfläche zu besitzen.

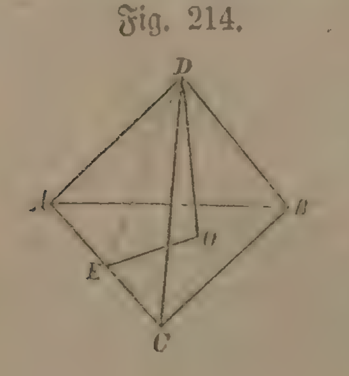
39. Aufgabe. **Die Beschaffenheit eines geraden Kegels zu finden, der bei gegebener Oberfläche den größten Inhalt und bei gegebenem Inhalte die kleinste Oberfläche hat.**

Auflösung. Aus der vorhergehenden Aufgabe ergibt sich, daß derjenige gerade Kegel, dessen Seitenlinie dem dreifachen Halbmesser der Grundfläche gleich ist, beiden Bedingungen Genüge leiste.

Die Auflösung dieser Aufgabe ergibt sich auch durch folgende Betrachtung: Denkt man sich um den gesuchten Kegel eine berührende, dreiseitige reguläre Pyramide gelegt, so verhalten sich, wie leicht nachgewiesen werden kann, die Inhalte dieser Körper 1) wie ihre Grundflächen, 2) wie ihre Oberflächen. Soll also ein Kegel bei gegebener Oberfläche ein Maximum des Inhaltes haben, so muß auch die Pyramide bei gegebener Oberfläche ein Maximum des Inhaltes haben. Da aber nach 37, Zus. 2 die Höhe der Seitenfläche der Pyramide dem dreifachen Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises gleich ist, so genügt also derjenige Kegel der obigen ersten Bedingung, dessen Seitenlinie dem dreifachen Halbmesser der Grundfläche gleich ist; derselbe Kegel genügt aber auch der zweiten Bedingung.

40. Aufgabe. **Die Eigenschaften eines Tetraeders anzugeben, dessen Grundfläche ein reguläres Dreieck ist, und dessen Inhalt bei gegebener Summe S der Seitenflächen ein Maximum ist.**

Fig. 214.



Auflösung. Denkt man sich in der in 29 angegebenen Weise das Tetraeder zu einem Parallelepipede ergänzt, so ist von demselben die Summe der Seitenflächen $= 4S$ bekannt. Die Aufgabe ist demnach auf 18, Zus. zurückgeführt. Die Seitenkanten DA, DC und DB des Tetraeders müssen also einander gleich und die Winkel an der Spitze rechte Winkel sein.

1. Zusatz. Fällt man von der Spitze D des Tetraeders auf die Grundfläche ACB die Höhe $DO = y$, ferner vom Fußpunkte O, dem Mittelpunkte des Dreieckes ACB, auf AC das Perpendikel $OE = x$, und verbindet E mit D, wo ED auf AC senkrecht stehen wird, so ist, wenn $DE = z$ gesetzt wird:

$$y^2 = z^2 - x^2 = AE^2 - x^2.$$

Es ist aber (Planim. VI., 10, Zus.) $AC^2 = 12 OE^2$ oder $AE^2 = 3x^2$. Es wird somit: $y^2 = 2x^2$.

Hieraus ergibt sich also der Satz: Von allen Tetraedern mit regulärer Grundfläche und gegebener Summe der Seitenflächen hat dasjenige den größten Inhalt, dessen Höhe zum Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises sich wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben verhält. Umgekehrt u. s. w.

2. Zusatz. Der Inhalt des Tetraeders steht mit x^2y in einem constanten Verhältnisse und ebenso die Summe der Seitenflächen mit xz oder $x\sqrt{x^2 + y^2}$. Es erreicht demnach überhaupt, wenn $x\sqrt{x^2 + y^2}$ constant ist, x^2y sein Maximum, wenn $y : x = \sqrt{2} : 1$; dasselbe Verhältniß von y und x findet Statt, wenn x^2y constant ist, und $x\sqrt{x^2 + y^2}$ ein Minimum werden soll.

3. Zusatz. Aus dem vorhergehenden Zusatze ergeben sich noch die nachfolgenden Sätze. Ein rechtwinkeliges Parallelepiped mit quadratischer Grundfläche hat bei gegebener Größe einer schief gegen die Grundfläche stehenden Diagonalebene den größten Inhalt, wenn die senkrecht gegen die Grundfläche stehende Diagonalebene ein Quadrat ist, und umgekehrt u. s. w.

4. Zusatz. Es ist also in einem rechtwinkeligen Parallelepiped von gegebenem Inhalte und quadratischer Grundfläche mit Rücksicht auf 14 und 40: 1) die Summe der beiden senkrecht auf der Grundfläche stehenden Diagonalebenen und deren beiden Grundflächen, 2) die Summe sämmtlicher 4 übrigen Diagonalebenen und 3) die Summe der beiden quadratischen Grundflächen nebst allen sechs Diagonalebenen ein Minimum, wenn die senkrecht gegen die Grundfläche stehende Diagonalebene ein Quadrat ist.

41. Aufgabe. Es soll eine reguläre n-seitige Pyramide angegeben werden, für welche die Summe der Seitenflächen von gegebener Größe und deren Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Es heiße die Höhe der Pyramide y, der Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises x, die gemeinschaftliche Höhe der Seitenflächen z. Es läßt sich nun leicht nachweisen, daß der Inhalt der Pyramide zu $x^2 y$ und die Seitenfläche zu xz, wo $z^2 = x^2 + y^2$ ist, in einem constanten Verhältnisse stehe. Die Aufgabe ist demnach auf 40, Zus. 2 zurückgeführt. Eine reguläre n-seitige Pyramide hat also bei gegebener Summe der Seitenflächen den größten Inhalt, wenn die Höhe derselben sich zum Radius des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises verhält, wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite derselben. Umgekehrt u. s. w.

Zusatz. Denkt man sich eine reguläre vierseitige Pyramide noch einmal und die zweite Pyramide mit ihrer Grundfläche an die erste gelegt, so entsteht eine Doppelpyramide, Octaeder, deren Inhalt bei gegebener Oberfläche ein Maximum wird, wenn die beide Spitzen verbindende Gerade der doppelten Diagonale der gemeinschaftlichen Grundfläche gleich ist. Leicht ist aber (III., 43) nachzuweisen, daß das reguläre Octaeder jene Bedingung erfüllt.

42. Aufgabe. Denjenigen Kegel zu finden, der bei gegebener Mantelfläche den größten Inhalt und bei gegebenem Inhalte die kleinste Mantelfläche habe.

Die Auflösung beruht auf 41.

Es hat also unter allen Kegeln von gleicher Mantelfläche derjenige den größten Inhalt, dessen Höhe zum Radius der Grundfläche sich verhält wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben. Dasselbe Verhältniß der Höhe zum Radius der Grundfläche findet Statt für den Kegel, der bei gegebenem Inhalte die kleinste Mantelfläche hat.

43. Aufgabe. In eine gegebene Kugel einen Kegel einzuschreiben, dessen Inhalt ein Maximum werde.

Der Durchmesser der Kugel heiße d, der Radius der Grundfläche des Kegels x, seine Höhe y. Die Achse des Kegels muß offenbar durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Es heiße das die Höhe y zum Durchmesser ergänzende Stück t. In jedem Kegel ist das Verhältniß des Inhaltes zu $x^2 y$ ein constantes, der Inhalt wird also zugleich mit $x^2 y$ zu einem Maximum. Es ist aber offenbar $x^2 = yt$, folglich $x^2 y = y^2 t$. Da nun

$y + t = d$ bekannt ist, so wird nach 3 sowohl $x^2 t$ als auch der Kegel zu einem Maximum, wenn $y = 2t$ ist. Hiernach ergibt sich leicht die Construction des gesuchten Kegels.

Fig. 215.



Aus $x^2 = yt$ folgt $y^2 = 2x^2$. Es hat also von allen einer gegebenen Kugel eingeschriebenen Kegeln derjenige den größten Inhalt, dessen Höhe sich zum Radius der Grundfläche verhält, wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben.

Zusatz. Unter allen Kegeln von gegebenem Inhalte hat derjenige die kleinste umgeschriebene Kugel, dessen Höhe sich zum Radius der Grundfläche wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben verhält.

44. Aufgabe. In eine gegebene Kugel einen Kegel einzuschreiben, dessen Mantelfläche ein Maximum wird.

Auflösung. d, x und y mögen die oben angegebene Bezeichnung haben, z bezeichne die Seite des Kegels. Da in allen Kegeln das Verhältniß der Mantelfläche zu xz ein constantes ist, so hängt das Maximum der Mantelfläche von dem Maximum von xz ab. Es heiße p die vierte Proportionale zu d, x und z, so daß $d : x = z : p$. Das Maximum von $xz = dp$ hängt also vom Maximum von p ab. Da $x^2 : p^2 = d^2 : z^2$ und $z^2 = dy$, so ist $x^2 : p^2 = d : y$, also $x^2 y = p^2 d$. Das Maximum p wird also auch $p^2 d$, somit $x^2 y$, also auch den Inhalt des gesuchten Kegels zu einem Maximum machen. Die Aufgabe ist demnach auf 43 zurückgeführt. Es hat also auch der in der Kugel eingeschriebene Kegel, dessen Höhe zum Radius der Grundfläche sich verhält wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben, die größte Mantelfläche.

Zusatz. Unter allen Kegeln von gleicher Mantelfläche hat derjenige die kleinste umgeschriebene Kugel, bei welchem die Höhe zum Radius der Grundfläche sich verhält, wie die Diagonale eines Quadrates zur Seite desselben.

45. Aufgabe. In eine gegebene Kugel einen Cylinder einzuschreiben, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Auflösung. Der Radius der Grundfläche des Cylinders heiße x, die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Grundfläche heiße y, der

17*

Radius der Kugel r. Die Höhe des Cylinders wird offenbar $2y$ sein. Der Inhalt des Cylinders steht mit x^2y in einem constanten Verhältnisse, er wird also zugleich mit x^2y zu einem Maximum. Da $x^2 + y^2 = r^2$, so wird die Aufgabe auf 9 zurückgeführt; es ist also $x : y = \sqrt{2} : 1$. Die Höhe des Cylinders verhält sich also zum Durchmesser der Grundfläche, wie die Seite eines Quadrates zur Diagonale desselben. Umgekehrt: Derjenige Cylinder, dessen Höhe sich zum Durchmesser der Grundfläche wie die Seite eines Quadrates zur Diagonale desselben verhält, hat von allen Cylindern gleichen Inhaltes die kleinste umgeschriebene Kugel. Die Construction ist der des größten Kegels ganz analog, und eben so leicht wie diese.

46. **Unter allen Körpern mit gegebener Größe der Oberfläche hat die Kugel den größten Inhalt und umgekehrt hat unter allen Körpern mit gegebenem Inhalte die Kugel die kleinste Oberfläche.**

Hinsichtlich des Beweises müssen wir der Kürze wegen auf Steiner's Abhandlung über diesen Gegenstand in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, 24. Band, verweisen.

Anhang X.

Vermischte Aufgaben.

1. **Einen vierkantigen Körperwinkel mittels einer Ebene so zu schneiden, daß der Durchschnitt ein Parallelogramm wird.**

Die Auflösung ist auf I., 6 und I., 42, Zusatz 1 zu gründen.

2. **Eine von drei rechten Winkeln gebildete Körperecke mittels einer Ebene so zu schneiden, daß die Durchschnittsfigur einem gegebenen Dreiecke congruent wird.**

Aus dem Scheitel der Ecke fälle man auf die gesuchte Ebene ein Loth und untersuche, ob das Ende desselben nicht in einen der in Planim. II., 50–53 betrachteten vier merkwürdigen Punkte des Dreieckes fällt, welches aus dem Durchschnitte entsteht. Ist dieses gefunden, so hat die Construction

der drei rechtwinkeligen Dreiecke, welche auf den Seiten des gegebenen Körperwinkels abgeschnitten werden, keine Schwierigkeit.

3. Zu beweisen, daß jede Ebene, welche mit zweien gegenüberliegenden Seiten eines windschiefen Viereckes parallel ist, die beiden anderen Seiten in proportionirte Stücke theilt. Umgekehrt: jede Gerade, welche zwei gegenüber liegende Seiten eines windschiefen Viereckes in proportionirte Stücke theilt, liegt in einer mit den beiden anderen Seiten parallelen Ebene.

Der Beweis ist an III., 17 zu knüpfen und leicht.

4. Ein windschiefes Viereck ist gegeben und eine Gerade, welche zwei Gegenseiten desselben in proportionirte Stücke theilt; man soll eine zweite Gerade ziehen, welche die beiden anderen Gegenseiten in proportionirte Stücke theilt und dabei gegen die erste senkrecht gerichtet ist.

Die Auflösung ist auf den vorigen Satz zu gründen.

5. Einen Würfel durch eine Ebene so zu schneiden, daß der Schnitt ein reguläres Sechseck bildet.

Man suche, in welchen Punkten die Kanten des Würfels von der schneidenden Ebene getroffen werden müssen, damit der Schnitt ein reguläres Sechseck werde. Welcher Ebene wird die Ebene des Sechseckes parallel?

6. Eine vierseitige Pyramide $SABCD$, deren Grundfläche $ABCD$ ein Rechteck ist und deren Spitze S senkrecht über der Mitte der Grundfläche liegt, mittels einer durch die Seite BC der Grundfläche gehenden Ebene in zwei gleich große Räume zu theilen.

Anleitung. Der Schnitt ist ein Trapez und Basis einer zweiten Pyramide, welche der Aufgabe nach die Hälfte der ganzen gegebenen Pyramide sein muß. Untersucht man, in welchem Verhältnisse, dieser Bedingung gemäß, jede der Seitenkanten SA und SD oder die Höhe des gleichschenkeligen Dreieckes SAD von der Theilungsebene geschnitten wird, so wird man auf den in Planim. V., 68 behandelten Schnitt geführt.

7. Von einer vierseitigen Pyramide $SABCD$, deren Grundfläche ein Trapez ist ($AB \parallel CD$), sei gegeben: 1) die Seitenfläche SAD der Größe und Lage nach; 2) die Richtung der Parallelen AB und CD; 3) die Winkel der Seitenfläche SCB; die Pyramide zu construiren. (Fig. 216.)

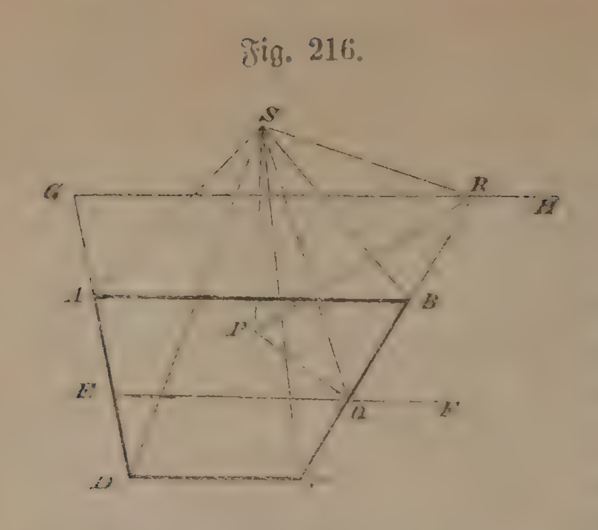


Fig. 216.

Anleitung zur Lösung: Aus der Spitze S fälle man auf die Grundfläche $ABCD$ das Perpendikel SP, dann von P auf CB das Perpendikel PQ, nehme hierauf in der Richtung CB von Q an ein Stück $QR = QS$, so werden die Punkte Q und R auf zweien der Lage nach gegebenen Parallelen zu AB und CD liegen. Die Aufgabe ist hiedurch auf die Construction des bei Q rechtwinkeligen Dreieckes PQR gebracht, dessen Ecken Q und R in jenen Parallelen EF und GH liegen und worin die Differenz der Quadrate über den Katheten PQ und QR, wie sich leicht finden wird, gleich SP^2 ist. Die Construction dieses Dreieckes führt dann weiter auf die Lösung der planimetrischen Aufgabe zurück: zwei Linien zu finden, deren Quadrate einen gegebenen Unterschied haben und deren Rechteck einem gegebenen gleich ist.

8. **Ein gegebenes dreiseitiges Prisma so zu schneiden, daß der Schnitt einem gegebenen Dreiecke ähnlich wird.**

Die Aufgabe kann sofort auf die vorige zurückgeführt werden.

Bemerkung. Fast identisch ist folgende Aufgabe: ein gegebenes Dreieck auf eine Ebene so zu projiciren, daß die Projection einem anderen gegebenen Dreiecke ähnlich wird.

9. **Den Inhalt eines von sechs gleichen Rhomben begrenzten Parallelepipedums (Rhomboeders in der Krystallographie) durch die beiden Diagonalen dieser Rhomben auszudrücken.**

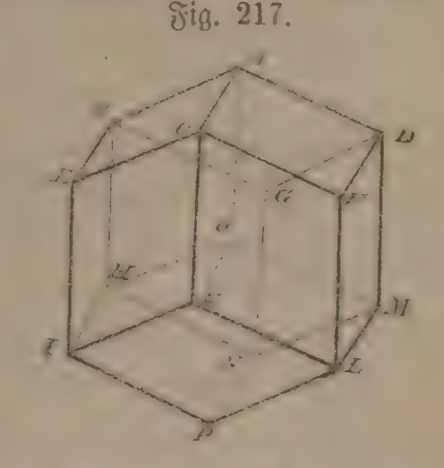
Man unterscheide das stumpf- und das spitzwinkelige Rhomboeder: im ersten stoßen an zweien gegenüber liegenden Ecken des Körpers drei stumpfe, im anderen drei spitze Winkel zusammen. Legt man durch drei einer solchen Ecke benachbarte Ecken des Körpers eine Ebene, so schneidet sie eine Pyramide ab, deren Seitenflächen congruente gleichschenkelige Dreiecke sind und deren Basis ein gleichseitiges Dreieck ist. Das Rhomboeder ist das 6fache einer solchen Pyramide. Hiernach wird man finden, daß, wenn a die große,

b die kleine Diagonale der Rhomben bezeichnet, der Inhalt des stumpfwinkeligen Rhomboeders $= \frac{1}{6}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}$, der Inhalt des spitzwinkeligen $= \frac{1}{6}b^2\sqrt{3a^2 - b^2}$.

10. Den Inhalt eines von zwölf gleichen Rhomben begrenzten Körpers (rhomboidalen Dodekaeders) zu finden.

Dieser in der Natur als Krystall vorkommende Körper besteht aus vier stumpfwinkeligen Rhomboedern, deren gemeinschaftliche Ecke o der Mittelpunkt des Körpers ist. Eine Ansicht desselben gibt nachstehende Figur. Die vier Rhomboeder darin sind oE, oF, oG und oP; die punktirten Kanten oA, oH, oK und oM liegen im Innern des Körpers; jede derselben macht gleiche Winkel mit den drei an sie stoßenden Kanten. Untersucht man zuerst, welches Verhältniß die beiden Diagonalen der den Körper begrenzenden Rhomben haben müssen, so findet man dieses Verhältniß $= \sqrt{2} : 1$. Bezeichnet man die Rhomboederkante mit a,

Fig. 217.



so ergibt sich aus (9) der Inhalt eines der vier Rhomboeder $= \frac{4}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot a^3$, also ist der Inhalt des ganzen Körpers $= \frac{16}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot a^3$.

1. Zusatz. Die Ecken A, E, K, F, M, G, H und P der dreiflächigen Körperwinkel bilden die Ecken eines Würfels; die Ecken B, C, D, L, N und I der vierflächigen Körperwinkel bilden die Ecken eines regulären Octaeders.

2. Zusatz. Auf welche Weise kann das Rhomben-Dodekaeder aus dem Würfel abgeleitet werden, und wie groß ist der Inhalt desselben im Vergleich zu dem Würfel?

11. Höhe und Grundfläche einer Kugelkappe (sphärischen Calotte) anzugeben, die

a) zu dieser ihrer Grundfläche,
b) zum Mantel des eingeschriebenen Kegels von gleicher Höhe,
c) zum Mantel des umgeschriebenen Kegels,
d) zum Mantel des umgeschriebenen abgekürzten Kegels sammt dessen, die Kugel berührenden, Grundfläche

ein gegebenes Verhältniß $m : n$ hat. Der Radius der Kugel ist dabei gegeben.

Man suche überall zunächst die Höhe der Calotte, hierauf den Radius ihrer Grundfläche durch Anwendung der betreffenden Sätze in Cap. IV., Abschn. 2 und 3.

12. Ein Kugelsegment zu finden und zu construiren,

a) welches an cubischem Inhalte dem Kegel über derselben Basis gleich ist, dessen Spitze im Centrum der Kugel liegt,

b) dessen begrenzende Calotte dem Mantel des eben genannten Kegels gleich ist.

Die Analyse beider Aufgaben führt dahin, daß die Grundebene des Kugelsegmentes den auf ihr senkrechten Radius bei der ersten (a) nach dem goldenen Schnitte, bei der zweiten (b) im Verhältniß $2 : 3$ theilen müsse.

13. Zu beweisen, daß der Unterschied zwischen einem Kugelsegmente und dem ihm umgeschriebenen abgekürzten Kegel so groß ist, wie ein Kegel von gleicher Höhe mit beiden, dessen Basis diejenige des abgekürzten ist, welche die Kugel berührt.

Anwendung der Sätze VI., 3 und 10.

14. In einem geraden Kegel, dessen Seitenlänge gleich a und Radius der Grundfläche gleich r gegeben sind, sei eine Kugel eingeschrieben, welche sowohl die Grundfläche des Kegels als dessen Mantel, letzteren in einem kleinen ihrer Kreise, berührt. Man soll Inhalt und Oberfläche dieser Kugel, so wie die Größe des Berührungskreises durch a und r ausdrücken, auch die Größe der Segmente, in welche dieser die Kugel und ihre Oberfläche theilt.

Der Radius der Kugel ist $= r\sqrt{\frac{a - r}{a + r}}$, der des Berührungskreises $= \frac{r}{a}(a - r)$. In welchem Verhältnisse müssen a und r zu einander stehen, wenn Kegel und Kugel oder wenn ihre Oberflächen ein gegebenes Verhältniß haben sollen?

15. Den Inhalt einer biconvexen Linse zu berechnen, wenn die Dicke derselben und die Radien der beiden Kugeln gegeben sind, zu welchen ihre sphärischen Seitenflächen gehören.

Man bestimme nach VI., 10 den Inhalt eines jeden der beiden Kugelsegmente, aus welchen die Linse besteht. Bezeichnet e die Dicke der Linse, a den einen, b den anderen Kugelradius, d die Entfernung der Mittelpunkte beider Kugeln, so ist $d = a + b - e$ und das Volumen der Linse $V = \pi e^2 \left(\frac{ab}{d} - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{4d}\right)$. Ist die Linse gleichseitig oder $a = b$, so reducirt sich V auf $\frac{1}{2}\pi e^2 (a - \frac{1}{6}e)$.

16. Eine Kegelfläche berührt zwei ganz außer einander liegende Kugeln von gegebenen Radien. Welchen Inhalt hat der zwischen der Kegelfläche und den beiden Kugeln enthaltene Raum?

Man bestimme zuerst den zwischen den Ebenen der Berührungskreise liegenden abgestumpften Kegel und ziehe die darin liegenden Kugelsegmente von ihm ab. Bezeichnet man die Radien der beiden Kugeln mit a und b, den kürzesten Abstand zwischen diesen Kugeln mit n, so ist der Abstand der Mittelpunkte $= a + b + n$, und das gesuchte Volumen zwischen der Kegelfläche und den Kugeln

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{[(a + b) n + 2ab]^2 - abn^2}{a + b + n}.$$

Berühren sich die Kugeln, so reducirt der Ausdruck sich auf:

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a^2b^2}{a + b}.$$

17. Von einer gegebenen Kugel ein Segment abzuschneiden, welches:

a) zu dem entsprechenden Kugelsector (VI., 7),

b) zu dem größten eingeschriebenen Kegel auf derselben Basis,

c) zu dem umgeschriebenen Kegel, dessen Mantel also die Kugel berührt,

d) zu dem Kegel auf derselben Basis, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt,

e) zu einem Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe,

f) zu einem umgeschriebenen abgekürzten Kegel

ein gegebenes Verhältniß $m : n$ hat.

Bezeichnet x die Höhe des Segmentes, r den Radius der Kugel, so ist

a) $x^2 - 3rx + 2\frac{m}{n}r^2 = 0.$

b) $(m - n)\, x = (2m - 3n)\, r.$

c) $x^2 - 4rx + \frac{3n - 4m}{n - m} r^2 = 0.$

d) $x^2 - 3rx + \frac{2m}{m + n} r^2 = 0.$

e) $(3m - n) x = 3 (2m - n) r.$

f) $x^2 - 5rx + \frac{6n - 7m}{n - m} r^2 = 0.$

18. **In eine gegebene Kugel einen Cylinder oder einen Kegel einzuschreiben, welcher**

a) zu dem an der Grundfläche liegenden Kugelsegmente,

b) zu dem den Mantel umgebenden ringförmigen Theile der Kugel in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ steht.

Bezeichnet x den Abstand der Grundfläche des Körpers vom Mittelpunkte der Kugel, r den Halbmesser der letzteren, so ist:

ad a) für den Cylinder $x^2 + rx = \frac{2m}{m + 6n} r^2$

" " Kegel $(m + n) x^2 + (m + 2n) rx = (2m - n) r^2$

ad b) " " Cylinder $(2m + 3n) x^2 = 3nr^2$

" " Kegel $nx = (n - m) r.$

19. **Zu beweisen, daß der durch Umdrehung eines beliebigen Dreieckes um eine in seiner Ebene, aber außer ihm liegende, Achse beschriebene Körper einem Prisma über jenem Dreiecke gleich ist, dessen Höhe der vom Schwerpunkte des Dreieckes (Durchschnittspunkte der Mittellinien, (Plan. II., 53) beschriebenen Peripherie an Länge gleichkommt.**

Der Satz spricht einen besonderen Fall des unter dem Namen „Guldin'sche Regel“ bekannten allgemeinen Satzes der Statik aus. Zum Beweise fälle man aus den drei Spitzen des Dreieckes Perpendikel auf die Achse, wodurch drei Trapeze entstehen, welche bei der Umdrehung abgekürzte Kegel beschreiben. Die Anwendung von VI., 3 auf diese Kegel und gehörige Rücksicht auf die in Plan. VIII., 62 ausgesprochene Eigenschaft des Schwerpunktes führt alsbald zur Aussage des Satzes.

20. **Ein gegebenes Dreieck durch eine mit seiner Grundlinie parallele Gerade so zu theilen, daß die bei der Umdrehung des Dreieckes um seine Grundlinie von den beiden Theilen desselben beschriebenen ringförmigen Körper gleich groß werden.**

Die Auflösung kann am bequemsten auf (19) gegründet werden. Setzt man den Abstand der gesuchten Geraden von der Grundlinie oder der Spitze des Dreiecks $= x$, so erhält man eine cubische Gleichung, deren Wurzeln leicht zu finden sind.

21. Ein gegebenes Dreieck ABC durch eine aus der Ecke A gezogene Transversale AD so zu schneiden, daß die durch die Theile ABD und ACD des Dreieckes bei Umdrehung des Ganzen um eine gegebene Achse beschriebenen zwei ringförmigen Körper einander gleich groß werden.

Zur Auflösung ist (19) anzuwenden. Bezeichnen a, b und c die Abstände der drei Ecken des Dreieckes von der Achse, $d = \frac{1}{3}(a + b + c)$ den Abstand seines Schwerpunktes von derselben Achse (Plan. VIII., 62), l die Hälfte der zu theilenden Seite BC, so daß $BC = 2l$, endlich p eine vierte Proportionale zu $b - c$, l und $3d$ ist, so ist

$$BD = p + l - \sqrt{p^2 + l^2}, \quad DC = l - p + \sqrt{p^2 + l^2}.$$

22. In einen gegebenen geraden Kegel einen senkrechten Cylinder einzuschreiben,

1) dessen cubischer Inhalt, oder:

2) dessen Mantel, oder:

3) dessen Mantel sammt einer Grundfläche,

4) dessen ganze Oberfläche

ein Maximum ist.

Bezeichnet a die Achse des Kegels, r den Radius seiner Grundfläche, x die Höhe eines eingeschriebenen Cylinders, y den Ueberschuß von a über x, so daß $x + y = a$, so ist der Radius der Grundfläche des Cylinders $= \frac{ry}{a}$; mithin:

1) der Inhalt $= \frac{\pi r^2}{a^2} \cdot y^2 x$; er wird (Anhang IX., 3) am größten, wenn $x = \frac{1}{2}y$, also $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{2}{3}a$ ist;

2) der Mantel $= \frac{2\pi r}{a} \cdot xy$; er ist am größten, wenn $x = y = \frac{1}{2}a$;

3) der Mantel sammt einer Grundfläche $= \frac{\pi r}{a^2}(2ax + ry)y = \frac{\pi r}{a^2}(2a^2 - 2ay + ry)y$. Ist $r =$ oder $> 2a$, so findet kein

Maximum Statt. Ist $r < 2a$, so ist die Summe von Mantel und Grundfläche dem Producte $[2a^2 - (2a - r)\, y]\, y$ oder auch dem Producte $\left(\frac{2a^2}{2a - r} - y\right) y$ proportional, wird also ein Maximum, wenn $y = \frac{a^2}{2a - r}$, woraus $x = \frac{a\,(a - r)}{2a - r}$. Soll für diese Werthe der Cylinder ein im Kegel eingeschriebener sein, so ist es nothwendig, daß $r < a$ ist;

4) die ganze Oberfläche ist $= \frac{2\pi r}{a^2}\,[a^2 - (a - r)\, y]\, y$; ein Maximum findet nur Statt, wenn $r < a$; für dieses ist $y = \frac{a^2}{2\,(a - r)}$, $x = \frac{a\,(a - 2r)}{2\,(a - r)}$. Soll der Cylinder dem Kegel eingeschrieben sein, so muß $r < \frac{a}{2}$ sein.

23. **Hülfsaufgabe.** Die Bedingung zu finden, unter welcher ein rechtwinkeliges Parallelepipedum, wovon zwei der Seitenflächen einen gegebenen Umfang haben, dem Inhalte nach ein Maximum ist.

Die Höhe des größten Parallelepipedums unter allen denjenigen, deren Seitenflächen denselben Umfang haben, sei x, die Seiten seiner Grundfläche seien y und z. Damit das dem Inhalte proportionale Product xyz ein Maximum sei unter allen, für welche die Summen $x + y$ und $x + z$ dieselbe Größe haben, muß für jedes noch so kleine d

$$xyz > (x \pm d)\,(y \mp d)\,(z \mp d)$$

sein. Durch Entwickelung des letzteren Productes ergibt sich, daß für jedes d

$$xyz > xyz \mp (xy + xz - yz)\, d - (y + z - x)\, d^2 \pm d^3$$

sein müsse. Dieses kann aber nur Statt finden, wenn $xy + xz = yz$ ist; und wirklich: wenn

$$xy + xz = yz, \text{ so ist } y + z > x \text{ und also:}$$

$$xyz > xyz - (y + z - x \pm d)\, d^2.$$

Der Inhalt des Parallelepipedums, dessen Seitenflächen einen gegebenen Umfang haben, wird daher am größten, wenn die Summe zweier anstoßenden Seitenflächen (oben $xy + xz$) der Grundfläche (yz) gleich ist.

Zusatz. Ist $x + y = a$, $x + z = b$, so ist für das größte Parallelepiped $x = \frac{1}{3}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$, $y = \frac{1}{3}(2a - b + \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$, $z = \frac{1}{3}(2b - a + \sqrt{a^2 + b^2 - ab})$; der größte Inhalt

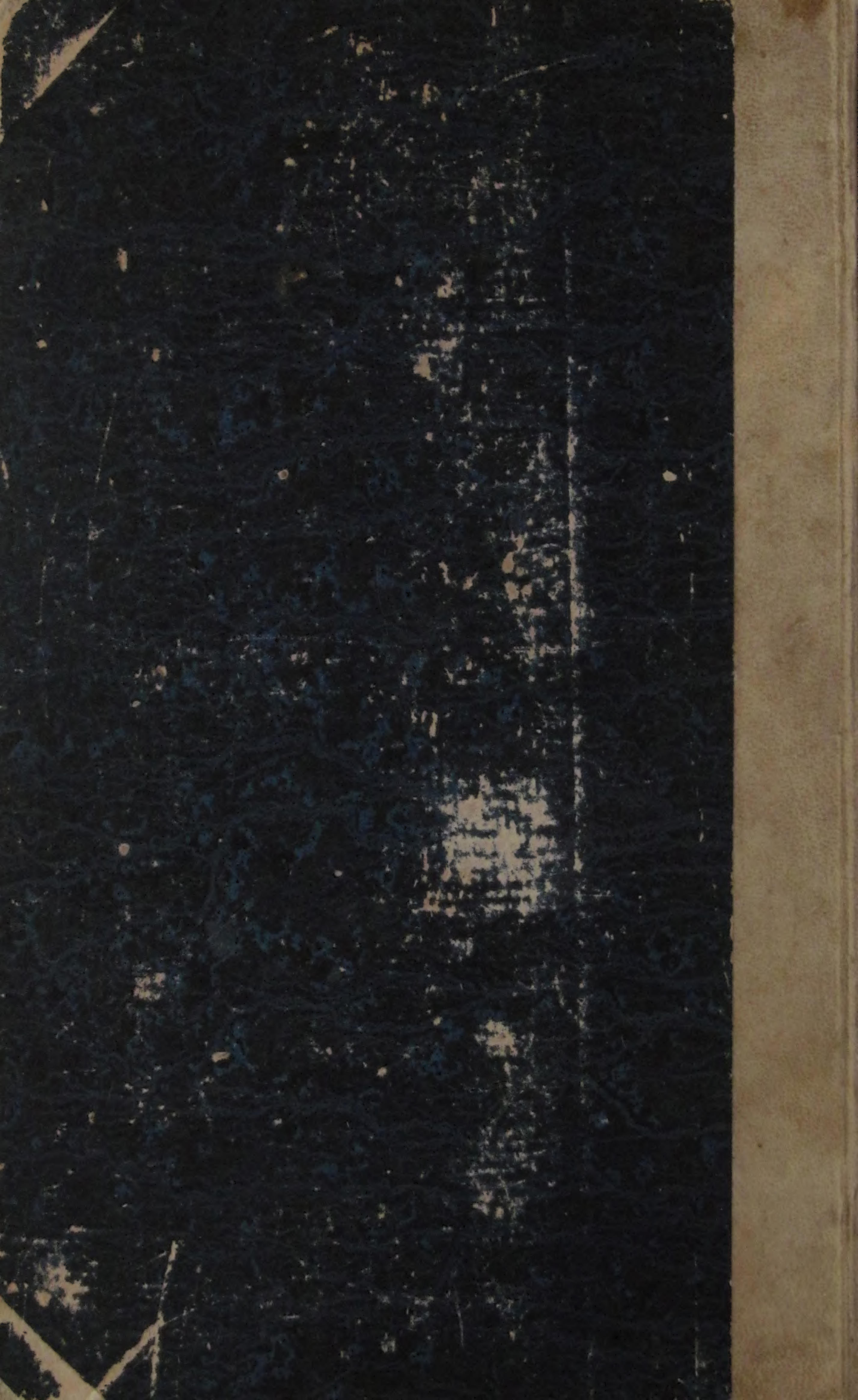
$$xyz = \tfrac{1}{27}\left[(a + b)\,(2b - a)\,(2a - b) + 2\sqrt{(a^2 + b^2 - ab)^3}\right].$$

24. **In ein gegebenes Kugelsegment den größtmöglichen Cylinder einzuschreiben.**

Bezeichnet h die Höhe des Segmentes, y die des einzuschreibenden Cylinders, x den Ueberschuß der ersten Höhe über die zweite (also $x + y = h$), z die Ergänzung der x zum Durchmesser $2r$ (also $x + z = 2r$), so ist der Inhalt des Cylinders $= \pi xyz$. Derselbe wird nach der vorigen Nr. am größten, wenn $x(y + z) = yz$. Vertauscht man a und b der vorigen Nr. mit h und $2r$, so erhält man sofort für die Höhe y des größten Cylinders

$$y = \frac{1}{3}\left[\sqrt{h^2 + 4r^2 - 2hr} - 2(r - h)\right].$$

Die Construction dieses Werthes ist sehr einfach. Ist nämlich AB ein Durchmesser der Grundfläche des Segmentes, O dessen Mitte, so ziehe man den Kugelradius CB, verlängere denselben über das Centrum C hinaus um $CG = \frac{1}{3} CB$ und beschreibe in der Ebene ABC über GB einen Halbkreis. Derselbe schneidet auf dem zur Grundfläche des Segmentes senkrechten Radius COD die Höhe OM des verlangten Cylinders ab. Den Beweis dazu wird der Leser leicht selbst finden.




datacolor



0 inch
1
2
3
4
5
30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16